WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^1(I, \mathbb{R}^+)$. Die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

ist eine **Rotationsfläche** in $\mathbb{R}^3$.

(a) M ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(b) Geben Sie eine explizite Parametrisierung von M (bis auf eine zweidimensionale Nullmenge, d.h. $N \subset M$ mit $\mathrm{Vol}_2(N) = 0$) durch eine einzige Karte an.

(c) Bestimmen Sie den Maßtensor dieser Karte und zeigen Sie, daß die Fläche von M gegeben ist durch

$$\mathrm{Vol}_2(M) = 2\pi \int_I f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt,$$

sofern dieses Integral existiert.

Aufgabe 2. (a) Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r, x_n > 0\}$ die $(n-1)$-dimensionale obere Hemisphäre vom Radius r. Zeigen Sie durch eine geeignete Darstellung von M als Graph, daß für jede integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_M f(x)\, dS(x) = \int_{\{\|\xi\|<1\} \subset \mathbb{R}^{n-1}} \frac{r^{n-1} f(r\xi, r\sqrt{1 - \|\xi\|^2})}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}}\, d\xi.$$

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^+$, so daß f über die Sphäre

$$S_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$$

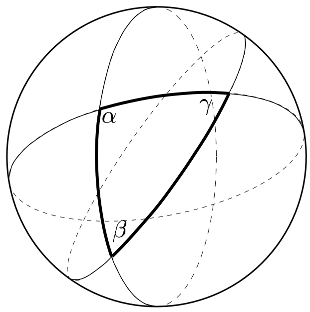
für $r \in \mathbb{R}^+ \setminus N$ integrierbar ist, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{S_r} f(x)\, dS(x) \right) dr.$$

(c) Es gilt $\mathrm{Vol}_{n-1}(S_r^{n-1}) = n\omega_n r^{n-1}$; hierbei bezeichnet ω_n das n-dimensionale Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

b.w.

Aufgabe 3. Ein von drei Großkreisen auf S^2 berandetes sphärische Dreieck mit den Winkeln α, β, γ hat den Flächeninhalt $\alpha + \beta + \gamma - \pi$. Diese Zahl heißt der **sphärische Exzeß** des Dreiecks.



Hinweis: Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen zwei Großkreisen? Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich dann aus einer elementargeometrischen Überlegung.

Aufgabe 4. Der **Torus** ist die Fläche, die durch Rotation der Kreislinie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$$

(mit $0 < r < R$) um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie die Fläche dieses Torus mittels der in Aufgabe 1 angegebenen Formel.

Abgabe: Donnerstag 11.12.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft