WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Die 1-Form ω auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sei gegeben durch

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma \omega$ für folgende Integrationswege γ:

(a) Der positiv durchlaufene Kreis vom Radius r um den Nullpunkt.

(b) Ein achsenparalleles Rechteck, das den Nullpunkt im Inneren enthält.

(c) Ein achsenparalleles Rechteck, das den Nullpunkt nicht enthält.

Aufgabe 2. Es sei $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ eine stetige differenzierbare geschlossene 1-Form auf einem offenen Rechteck $U \subset \mathbb{R}^2$, d.h. es gelte $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Zeigen Sie, daß ω exakt ist, indem Sie nachweisen, daß für beliebiges $(a,b) \in U$ die Funktion

$$f(x,y) := \int_a^x p(t,b)\,dt + \int_b^y q(x,t)\,dt$$

eine Stammfunktion von ω ist. Verallgemeinern Sie diesen Beweis auf den $\mathbb{R}^3$ und den $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbf{v}$ ein **konservatives** Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gebe eine Funktion $f \in C^1(U)$, so daß $\mathbf{v}(p) = \operatorname{grad} f(p) \in T_pU$ für jedes $p \in U$.

Weiter sei $\gamma \in C^2([a,b],U)$ eine Kurve in U, die dem Newtonschen Bewegungsgesetz

$$\gamma''(t) = \mathbf{v}(\gamma(t)), \quad t \in [a,b],$$

genügt. Man beweise (für $t_1, t_2 \in [a,b]$) den Energiesatz

$$\frac{1}{2}\|\gamma'(t_2)\|^2 - \frac{1}{2}\|\gamma'(t_1)\|^2 = f(\gamma(t_2)) - f(\gamma(t_1)).$$

Aufgabe 4. (a) Sei $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ eine auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definierte stetig differenzierbare, geschlossene 1-Form. Es gebe einen Kreis um den Nullpunkt, so daß das Integral von ω längs dieses Kreises gleich 0 ist. Dann gilt $\int_\gamma \omega = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, d.h. ω ist exakt.

(b) Es sei (u,v) ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, d.h.

$$p \mapsto (u(p), v(p)) \in \mathbb{R}^2 = T_pU,$$

ist eine C^1-Abbildung. Es gelte $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Dann gibt es eine reelle Zahl c, so daß das Vektorfeld

$$(u(x,y) - c\frac{y}{x^2+y^2}, v(x,y) + c\frac{x}{x^2+y^2})$$

konvervativ ist.

Abgabe: Donnerstag 18.12.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft