WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachte man die 2-Form

$$\omega = 2xz\, dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\, dx \wedge dy.$$

Zeigen Sie, daß $d\omega = 0$ gilt, und bestimmen Sie eine stetig differenzierbare 1-Form η auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $\omega = d\eta$.

Aufgabe 2. Das Dachprodukt von $\omega \in \Lambda^k V^*$ und $\sigma \in \Lambda^l V^*$ kann ohne Wahl einer Basis von V^* definiert werden durch

$$(\omega \wedge \sigma)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sign}(\pi) \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) \sigma(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+l)}).$$

(a) Zeigen Sie, daß dies äquivalent ist zur Definition aus der Vorlesung.

(b) Leiten Sie die Eigenschaften des Dachproduktes (Linearität, Assoziativität, alternierende Eigenschaft) aus der obigen Definition her.

Aufgabe 3. (a) In der Vektoranalysis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ hat man folgende Produktregeln für differenzierbare Funktionen f und differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{w}$:

(i) $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{v} \rangle$

(ii) $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{v}$

(iii) $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$.

Man beweise diese Formeln, indem man die entsprechenden Formeln für Differentialformen herleitet.

(b) Zeigen Sie folgende Formeln für den Laplace Operator $\triangle$:

(i) $\triangle f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$

(ii) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \triangle \mathbf{v}$

Aufgabe 4. Sei $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$.

(a) Beschreiben Sie eine Lösung $\mathbf{v}^0 = (v_1^0, v_2^0, v_3^0)$ der Differentialgleichung $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{b}$ durch explizite Integralformeln in den Funktionen b_1, b_2, b_3.

(b) Zeigen Sie, daß die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{b}$ beschrieben wird durch

$$\{\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \operatorname{grad} f \,:\, f \in C^2(\mathbb{R}^3)\}.$$

Unter welcher Bedingung an f gilt $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$?

Abgabe: Donnerstag 8.01.2004 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft