WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Es sei $\Phi\colon\ \mathbb{R}^+ \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ die Polarkoordinatenabbildung definiert durch

$$(r,\theta,\varphi) \longmapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

(a) Berechnen Sie Φ^*dx, Φ^*dy, Φ^*dz, $\Phi^*(dx\wedge dy)$, $\Phi^*(dy\wedge dz)$, $\Phi^*(dz\wedge dx)$ und $\Phi^*(dx\wedge dy\wedge dz)$.
(b) Es sei $\omega = z^2\, dx\wedge dy\wedge dz$. Betrachte die Mengen

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq 0\}$$

(d.h. die obere Hälfte der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$) und

$$\Omega = (0,1)\times(0,\pi/2)\times(0,2\pi).$$

Berechnen Sie $\int_A \omega$ und $\int_{\Phi|\Omega}\omega := \int_\Omega \Phi^*\omega$.

Aufgabe 2. Die obere Hälfte der Einheitssphäre $S^2\subset\mathbb{R}^3$ sei mittels der stereographischen Projektion parametrisiert, d.h. für $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ mit $u^2+v^2<1$ sei $\Phi(u,v)$ der Schnittpunkt von S^2 mit der Geraden durch die Punkte $(u,v,0)$ und $(0,0,-1)$.
(a) Zeigen Sie, daß

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right).$$

(b) Berechnen Sie $\int_\Phi\omega$ für die 2-Form

$$\omega = x\, dy\wedge dz - y\, dx\wedge dz + z\, dx\wedge dy.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie das Lemma von Poincaré für alle offenen Mengen, die zu sternförmigen Mengen diffeomorph sind.

Aufgabe 4. Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $f,g\in C^2(U)$ mit

$$df\neq 0 \ \text{ und } \ df\wedge dg\equiv 0 \ \text{ in } U.$$

Zeigen Sie, daß es — lokal — eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ϕ einer Variablen gibt, so daß $g=\phi\circ f$.

Hinweis: Man überlege sich, daß es evtl. nach Umnumerierung der Koordinaten lokale Diffeomorphismen der Form $\Phi=(f,x_2,\ldots,x_n)$ (etwa auf $U'\subset U$) gibt, und man betrachte die entsprechenden Gleichungen in $\Phi(U')$.

Abgabe: Donnerstag 15.01.2004 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft