WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ die Umkehrung der stereographischen Projektion vom Südpol aus wie in Aufgabe 2 von Blatt 12, aber ohne Einschränkung an $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Finden Sie die entsprechende Formel für die Umkehrung der stereographischen Projektion vom Nordpol

$$\widetilde{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0,0,1)\}.$$

(b) Berechnen Sie $\Phi^{-1} \circ \widetilde{\Phi}$. Wo ist diese Abbildung definiert?

(c) Wie schreibt sich die Abbildung $\Phi^{-1} \circ \widetilde{\Phi}$ als komplexe Funktion, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert?

Aufgabe 2. Das Möbiusband M kann als die Menge

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x = \cos t(1 + s\cos\tfrac{t}{2}), y = \sin t(1 + s\cos\tfrac{t}{2}), z = s\sin\tfrac{t}{2}, t \in [0,2\pi], s \in (-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\right\}$$

dargestellt werden.

(a) Machen Sie eine möglichst genaue Zeichnung dieser Menge.

(b) Beschreiben Sie M mittels zweier Karten, indem Sie den Parameterbereich jeweils geeignet einschränken und zeigen Sie dadurch, daß M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Warum folgt dies nicht unmittelbar aus der obigen Darstellung?)

(c) Zeigen Sie, daß M nicht orientierbar ist.

Aufgabe 3. Es sei M der Torus, der durch Rotation des Kreises $(x-a)^2 + z^2 = 1$ (mit $a > 1$ gegeben) um die z-Achse entsteht. M kann als Bildmenge der Abbildung

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} (a+\cos v)\cos u \\ (a+\cos v)\sin u \\ \sin v \end{pmatrix}, \; u \in [0,2\pi], \; v \in [0,2\pi]$$

beschrieben werden.

(a) Begründen Sie diese Behauptung.

(b) Es sei ω die 2-Form

$$\omega = x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy.$$

Berechnen Sie $\int_M \omega$, wobei M die durch Φ gegebene Orientierung tragen soll.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ und $\Phi : \Omega \xrightarrow{\cong} V \subset M$ eine Karte von M. Die **Tangentialebene** im Punkt $\Phi(u, v)$ ist der 2-dimensionale affine Unterraum des $\mathbb{R}^3$ durch den Punkt $\Phi(u, v)$, der von $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v)$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$ aufgespannt wird.

(a) Zeigen Sie, daß die Tangentialebene in $p \in M$ unabhängig von der Wahl der Karte Φ ist, die eine Umgebung von p parametrisiert.

(b) Es sei $p \in M$ und U eine Umgebung von $p \in \mathbb{R}^3$, so daß $M \cap U$ beschrieben werden kann als

$$M \cap U = \{(x, y, z) \in U : \ f(x, y, z) = 0\}$$

mit einer C^l-Funktion f $(l \geq 1)$, die der Bedingung $\nabla f \neq 0$ entlang $M \cap U$ genügt. Zeigen Sie, daß die Tangentialebene in p der 2-dimensionale affine Unterraum des $\mathbb{R}^3$ durch p ist, der orthogonal zu $\nabla f(p)$ steht.

Abgabe: Donnerstag 22.01.2004 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft