WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 14

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren 1-Formen $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ auf $\mathbb{R}^2$, die für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ und alle geschlossenen C^1-Kurven γ (d.h. Anfangspunkt = Endpunkt) die Bedingung

$$\int_\gamma p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \int_\gamma p(x+a, y+b)\,dx + q(x+a, y+b)\,dy$$

erfüllen.

Hinweis: Zeigen Sie $q_x - p_y =$ konst. durch geeignete Wahl von γ.

Welche 1-Formen erhält man, wenn nur Invarianz gegenüber Verschiebungen in x-Richtung gefordert wird.

Aufgabe 2. (a) Sei M die obere Hemisphäre von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch

$$\Phi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right), \quad u^2+v^2 < 1.$$

Sei $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) \equiv F_1\partial_x + F_2\partial_y + F_3\partial_z$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$. Die äußere Normale an S^2 ist $\mathbf{n}(x,y,z) = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$. Berechnen Sie

$$\Phi^*(F_1\,dy \wedge dz - F_2\,dx \wedge dz + F_3\,dx \wedge dy)$$

und

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\, dS,$$

wobei dS das Flächenelement bezüglich der Parametrisierung Φ bezeichnet.

(b) Dem stetig differenzierbaren Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ entspreche die $(n-1)$-Form

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} v_i\,dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

M sei eine n-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Das Integral $\int_{\partial M} \omega$ wird der "Durchfluß" des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch ∂M genannt (Teil (a) legt nahe, warum). Zeigen Sie

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(p) = \lim_{M \to p} \frac{1}{\mathrm{Vol}_n(M)} \int_{\partial M} \omega.$$

Machen Sie sich klar, was das geometrisch für $\operatorname{div} \mathbf{v}$ bedeutet. Hier ist der Limes so zu verstehen, daß für jede Folge (M_ν) von Untermannigfaltigkeiten mit $p \in M_\nu$ und $\lim_{\nu\to\infty} \operatorname{diam} M_\nu = 0$ die betreffende Zahlenfolge konvergiert.

Aufgabe 3. Es sei ω eine stetig differenzierbare geschlossene 1-Form auf einem bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$ sternförmigen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß ω exakt ist (daß also das Poincaré Lemma gilt), indem Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes beweisen, daß durch

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

eine Stammfunktion von ω gegeben ist, wo $\gamma_x : [0,1] \to G, t \mapsto tx$.

b.w.

Aufgabe 4. Betrachte das Gebiet

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$$

und die 1-Form

$$\omega_{(x,y)} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{und} \quad \omega_{(0,0)} = 0.$$

Welche Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften hat ω auf G und ∂G? Berechnen Sie $\int_G d\omega$ und $\int_{\partial G} \omega$. Warum ist der Satz von Gauß nicht anwendbar?

Bitte melden Sie sich zur Klausur an über `http://www.mi.uni-koeln.de/ geiges/`

Abgabe: Donnerstag 29.01.2004 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft