WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

# Differentialtopologie

Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.** Seien $h_i^{\pm}$ die in der Vorlesung definierten Karten für $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, d.h.

$$\begin{array}{rccc} h_i^{\pm} : & U_i^{\pm} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_1,\dots,x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{n+1}) \end{array}$$

wobei $U_i^{\pm} = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n : x_i \gtrless 0\}$. Sei $h^{\pm}$ die stereographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol auf die Äquatorebene, d.h. für $p \in S^n$, $p \neq (0,\dots,0,1) = N$ ("Nordpol"), ist $h^+(p)$ definiert als der Schnittpunkt der Geraden durch $N$ und $p$ mit der "Äquatorebene" $\{x_{n+1} = 0\}$; analog für $h^-$.

(a) Zeigen Sie:

$$h^+(x_1,\dots,x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}\,(x_1,\dots,x_n,0)$$

Wie sieht die entsprechende Formel für $h^-$ aus?

(b) Zeigen Sie, daß $\{h_i^{\pm}, i = 1,\dots,n+1\}$ und $\{h^{\pm}\}$ die gleiche differenzierbare Struktur auf $S^n$ definieren.

**Aufgabe 2.** $S^n$ ist Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

**Aufgabe 3.** Der reelle projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist der Quotient von $S^n$ unter der Identifikation $x \sim -x$, d.h. $\mathbb{RP}^n = \{[x] : x \in S^n\}$, wobei $[x] = [y]$ genau dann, wenn $x = \pm y$. Geben Sie $\mathbb{RP}^n$ eine Topologie und die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Hinweis: Man verwende hinreichend kleine Kartengebiete auf $S^n$. Man zeige: $\mathbb{RP}^1$ ist diffeomorph zu $S^1$.

**Aufgabe 4.** Der komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ ist der Quotient von $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ unter der diagonalen Aktion der Gruppe $S^1 \subset \mathbb{C}$, d.h.

$$\mathbb{CP}^n = \{[x_0,\dots,x_n] : (x_0,\dots,x_n) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}\}$$

wobei $[x_0,\dots,x_n] = [y_0,\dots,y_n]$ genau dann gilt, wenn es ein $\lambda \in S^1$ gibt mit $(x_0,\dots,x_n) = \lambda(y_0,\dots,y_n)$. Geben Sie $\mathbb{CP}^n$ eine Topologie und die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Man zeige: $\mathbb{CP}^1$ ist diffeomorph zu $S^2$.

**Aufgabe 5.** (a) $S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_k}$ kann in $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k+1}$ eingebettet werden.

(b) Beschreiben Sie eine Einbettung $S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ mit elementaren Funktionen.

b.w.

**Aufgabe 6.** Sei $M(m \times n)$ der Vektorraum der reellen $(m \times n)$-Matrizen und $M_r(m \times n)$ der Unterraum der Matrizen vom Rang $r$. Dann ist $M_r(m \times n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M(m \times n)$ der Kodimension $(n-r) \cdot (m-r)$. Hinweis: Ein typisches Kartengebiet um einen Punkt aus $M_r(m \times n)$ bildet die Menge $U \subset M_r(m \times n)$ der Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} A & AB \\ D & DB + C \end{pmatrix}, \, A \in M(r \times r), \det A \neq 0.$$

Eine solche Matrix liegt genau dann in $M_r(m \times n)$, wenn $C = 0$.

Aufgaben 1 und 2 sollen in der ersten Übung (Do 16.10.) besprochen werden; für die anderen Aufgaben ist Abgabe am 21.10. in der Vorlesung.