WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Ist $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gibt es zwei verschiedene Punkte $p, q \in S^n$, so daß $T_p f$ und $T_q f$ beide die Nullabbildung sind.

Aufgabe 2. Ist $M := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 = x_2^2 + \cdots + x_n^2, x_1 \geq 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$?

Aufgabe 3. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind nicht diffeomorph für $n \neq m$.

Aufgabe 4. (a) Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann ist $M \times N$ auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und es gilt

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \times T_q N$$

für jeden Punkt $(p, q) \in M \times N$.

(b) Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $F\colon M \to M \times N$ die durch $F(p) = (p, f(p))$ definierte Abbildung.

(i) Die Abbildung F ist differenzierbar und

$$T_p F(X) = (X, T_p f(X))$$

für $p \in M$, $X \in T_p M$.

(ii) Der Tangentialraum an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$ ist der Graph der Abbildung $T_p f\colon T_p M \to T_{f(p)} N$.

Aufgabe 5. (a) Geben Sie Beispiele

(i) einer Immersion, die nicht injektiv ist.

(ii) einer injektiven Immersion $f\colon M \to N$, wo $f(M)$ keine Untermannigfaltigkeit von N ist.

(b) Sei α eine irrationale Zahl und $f\colon \mathbb{R} \to T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ die Abbildung $t \mapsto (t, \alpha t)$ mod $\mathbb{Z}^2$. Dann ist f eine injektive Immersion, deren Bild dicht im Torus T^2 ist.

Hinweis: Es gibt beliebig große ganze Zahlen m, n mit $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, siehe z.B. Hilbert and Cohn-Vossen: Geometry and the Imagination, S. 41.

Abgabe am 28.10. in der Vorlesung.