WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Die Brieskorn-Mannigfaltigkeit $W^{2n-1}(d)$ ist definiert als die Menge der Punkte $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, die den Gleichungen

$$z_0^d + z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 0 \tag{1}$$

und

$$z_0\bar{z}_0 + \ldots + z_n\bar{z}_n = 2 \tag{2}$$

genügen ($d \in \mathbb{N}_0$). Zeigen Sie, daß $W^{2n-1}(d)$ eine $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2. Man zeige, daß die Mannigfaltigkeit der orthogonalen Matrizen $O(n)$ kompakt ist, daß die Gruppenoperationen

$$\begin{array}{ccc} O(n) \times O(n) & \longrightarrow & O(n) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \longrightarrow & O(n) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

differenzierbar sind, und daß $O(n)$ zwei Zusammenhangskomponenten hat.

Aufgabe 3. Sei p ein homogenes Polynom vom Grad k in n Variablen, d.h.

$$p(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k p(x_1, \ldots, x_n).$$

Man zeige, daß für $a \neq 0$ die Menge $M_a := \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = a\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Weiter zeige man, daß die M_a mit $a > 0$ alle zueinander diffeomorph sind, ebenso die M_a mit $a < 0$. Man gebe ein Beispiel eines Polynoms p, für das M_1 und M_{-1} nicht diffeomorph sind.

Aufgabe 4. Der Tangentialraum $T_I O(n)$ zu $O(n)$ and der Einheitsmatrix $I \in O(n)$ ist der Vektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen, d.h. der $A \in M(n \times n)$ mit $A^t = -A$.

Abgabe am 4.11. in der Vorlesung.