WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Konstruieren Sie eine C^∞-Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Menge kritischer Werte dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2. Für $\dim M < \dim N$ sagt der Satz von Sard, daß das Bild $f(M)$ einer differenzierbaren Abbildung $f : M \to N$ Maß 0 in N hat. Zeigen Sie dies direkt. Sie dürfen als bekannt voraussetzen, daß das Bild einer Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ unter einer C^1-Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wieder eine Nullmenge ist.

Aufgabe 3. (a) Ist $M \subset \mathbb{R}^p$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, dann gibt es eine Hyperebene, die M transversal schneidet.

(b) Sei M eine kompakte m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ eine differenzierbare Abbildung mit $0 \notin f(M)$. Dann gibt es eine Gerade durch den Ursprung von $\mathbb{R}^{m+1}$, die nur endlich viele Punkte von $f(M)$ trifft. Geben Sie ein Beispiel dafür, daß die Bedingung $0 \notin f(M)$ notwendig ist.

Aufgabe 4. (a) Sei $f : M \to \mathbb{R}^p$ eine differenzierbare Abbildung und $N \subset \mathbb{R}^p$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $v \in \mathbb{R}^p$ mit $\|v\| < \varepsilon$, so daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & f(x) + v \end{array}$$

transversal zu N ist. Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (x, y) & \longmapsto & y - f(x) \end{array}$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Setze $\Sigma^r(f) = \{p \in \mathbb{R}^m : \mathrm{rang}_p f = r\}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit Norm kleiner als ε, so daß $\Sigma^r(f + A)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ ist. Hinweis: Wenden Sie (a) auf eine geeignete Abbildung an und verwenden Sie Aufgabe 6 von Blatt 1.

Abgabe am 11.11. in der Vorlesung.