WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

# Differentialtopologie

Übungsblatt 5

**Aufgabe 1.** Beschreiben Sie mit expliziten Formeln eine differenzierbare Abbildung $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$, deren Bild aus der Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$ besteht.

**Aufgabe 2.** (a) Die in der Vorlesung definierte Topologie auf $TM$ hat eine abzählbare Basis.

(b) Zeigen Sie:

(i) $T(M \times N)$ ist diffeomorph zu $TM \times TN$.

(ii) $TS^1$ ist diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}$.

(c) Falls $M$ kompakt ist, so ist auch $T_1M$ kompakt.

(d) Überzeugen Sie sich, daß die natürliche Projektion $\pi\colon TM \to M$ eine $C^\infty$-Submersion ist.

**Aufgabe 3.** Die Mannigfaltigkeiten $T_1S^2$, $\mathbb{RP}^3$ und $SO(3)$ sind alle diffeomorph zueinander. Hinweis: Für den Diffeomorphismus zwischen $T_1S^2$ und $SO(3)$ betrachte die natürliche Gruppenwirkung von SO(3) auf $T_1S^2$. Für den zwischen $\mathbb{RP}^3$ und $SO(3)$ zeige man zunächst, daß sich $\mathbb{RP}^3$ schreiben läßt als $B^3/\sim$, wo $x \sim -x$ für $x \in \partial B^3 = S^2$.

**Zusatzaufgabe:** $TS^2$ ist nicht homöomorph zu $S^2 \times \mathbb{R}^2$.
Hinweis: Für diese Aufgabe benötigen Sie das Konzept der Fundamentalgruppe. Man beachte $\pi_1(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}_2$ und $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$.

**Aufgabe 4.** Beschreiben Sie eine differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so daß die Menge $f(\{t \in \mathbb{R} : t \geq k\})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ganz $\mathbb{Q}^n$ enthält.

Abgabe am 18.11. in der Vorlesung