WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Eine **Lie-Gruppe** ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G zusammen mit einer Gruppenstruktur, so daß die Gruppenverknüpfung

$$\begin{aligned} \mu\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

und die Inversen-Abbildung

$$\begin{aligned} \iota\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

differenzierbar sind. Zeigen Sie, daß G **parallelisierbar** ist, d.h., daß das Tangentialbündel TG trivial ist.

Aufgabe 2. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. Definiere die **Verdoppelung** M' von M durch Verkleben von zwei Kopien von M entlang ∂M, formal:

$$M' = (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) / \sim$$

mit

$$(p, 0) \sim (p, 1) \text{ für } p \in \partial M.$$

(a) Zeigen Sie mittels des Kragensatzes, daß man M' die Struktur einer (unberandeten) Mannigfaltigkeit geben kann.

(b) Seien $p_1, \ldots, p_k$ Punkte in $\mathring{M} \times \{0\} \subset M'$ und $q_1, \ldots, q_l$ Punkte in $\mathring{M} \times \{1\} \subset M'$. Zeigen Sie, daß es für dim $M \geq 2$ einen Diffeomorphismus von M' auf sich selbst gibt, so daß $p_1, \ldots, p_k$ nach $\mathring{M} \times \{1\}$ abgebildet werden und $q_1, \ldots, q_l$ fest bleiben.

(c) Mittels des (noch nicht bewiesenen) Transversalitätssatzes läßt sich ein Vektorfeld X auf M' mit endlich vielen Nullstellen konstruieren (als Schnitt $X\colon M' \to TM'$ transversal zum Nullschnitt $p \to 0_p \in T_pM'$). Verwenden Sie (b) um zu zeigen, daß jede Mannigfaltigkeit M mit nichtleerem Rand ein Vektorfeld ohne Nullstellen zuläßt.

b.w.

Aufgabe 3. (a) Sei $g\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ ein Homöomorphismus. Erweitern Sie g zu einem Homöomorphismus $D^n \to D^n$.

(b) Sei $f\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ ein Diffeomorphismus. Man zeige, daß die Verklebung von zwei Kopien von D^n entlang $\partial D^n = S^{n-1}$ mittels f, d.h.

$$M = (D^n \times \{0\} \cup D^n \times \{1\})/\sim, \quad (p, 0) \sim (f(p), 1)$$

eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

(c) Mittels (a) zeige man, daß für jedes f in (b) die Mannigfaltigkeit M homöomorph zu S^n ist.

Aufgabe 4. Ein Diffeomorphismus $\iota\colon M \to M$ heißt **Involution**, falls $\iota \neq \mathrm{id}_M$ und $\iota^2 = \mathrm{id}_M$.

(a) Sei $\iota\colon M \to M$ eine fixpunktfreie Involution. Dann ist M/ι eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (Beispiel: $\iota\colon S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$; $S^n/\iota = \mathbb{R}P^n$).

(b) Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und $\iota\colon M \to M$ eine fixpunktfreie Involution. Dann ist M Rand einer kompakten Mannigfaltigkeit.

Abgabe am 2.12. in der Vorlesung