WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei (E, π, B) ein k-dimensionales reelles Vektorbündel mit Riemannscher Metrik. Dann kann man Bündelkarten so wählen, daß die Übergangsfunktionen $\varphi_{\alpha\beta}$ Werte in $\mathrm{O}(k) \subset \mathrm{GL}(k)$ annehmen. Man nennt dies **Reduktion der Strukturgruppe** auf $\mathrm{O}(k)$.

Aufgabe 2. Eine Reduktion der Strukturgruppe eines k-dimensionalen reellen Vektorbündels von $\mathrm{GL}(k)$ auf

$$\mathrm{GL}^+(k) = \{A \in M(n \times n) : \det A > 0\}$$

heißt **Orientierung**.

(a) Das Möbius-Band ist ein nicht-orientierbares Geradenbündel.

(b) $\mathbb{RP}^2$ ist nicht orientierbar, d.h. $T\mathbb{RP}^2$ ist ein nicht-orientierbares Bündel.

Aufgabe 3. (a) Geben Sie ein Beispiel einer Diffeotopie $M \times \mathbb{R} \to M$, die nicht durch den Fluß eines Vektorfeldes auf M gegeben ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Isotopie

$$F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$$

mit der Eigenschaft, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F_t : & M & \longrightarrow & N \\ & x & \longmapsto & F(x,t) \end{array}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Einbettung ist, aber die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R} & \longrightarrow & N \times \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & (F(x,t),t) \end{array}$$

keine Einbettung ist.

Aufgabe 4. Es sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis. Die Einbettungen

$$f_0, f_1 : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

gegeben durch $f_0(x) = x$ bzw. $f_1(x) = x + (2,0)$ sind nicht isotop in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Abgabe am 9.12. in der Vorlesung.