WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei M eine orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ($p = q$ erlaubt) und einem orientierungserhaltenden Isomorphismus $\phi : T_pM \to T_qM$ gibt es einen Diffeomorphismus f von M mit $T_pf = \phi$.

Aufgabe 2. Der Scheibensatz gilt auch (mit gleichem Beweis wie in der Vorlesung) für Einbettungen $\mathbb{R}^k \hookrightarrow M^m$, allerdings i.a. nur bis auf Isotopie, nicht ambiente Isotopie. Geben Sie Beispiele von Einbettungen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \hookrightarrow S^1$, die nicht ambient isotop sind.

Aufgabe 3. Es gibt keine Einbettung $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$, deren Bild $f(\mathbb{R}^2)$ eine Menge der Form $S^1 \times \{x\}$ enthält. Hinweis: Blatt 8, Aufgabe 4.

Aufgabe 4. Eine Einbettung $f : S^{k-1} \hookrightarrow M$ heißt **unverknotet**, wenn f zu einer Einbettung von D^k erweitert. f is unverknotet genau dann, wenn es eine Karte $h : U \to \mathbb{R}^n$ von M und eine Isotopie F von f gibt, so daß $h \circ F : S^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Standardeinbettung $S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 5. * Ein Teilraum $A \subset X$ eines topologischen Raumes X heißt **Deformationsretrakt** von X, wenn es eine Homotopie $F : X \times I \to X$ gibt mit:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= x, \\ F(x,1) &\in A, \\ F(a,1) &= a \ \forall a \in A \end{aligned}$$

Die orthogonale Gruppe $O(n)$ ist Deformationsretrakt von $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$, der Gruppe der Diffeomorphismen von $\mathbb{R}^n$ (mit der schwachen Topologie, d.h. der Topologie lokal gleichmäßiger Konvergenz).

Abgabe am 16.12. in der Vorlesung