WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Eine Mannigfaltigkeit heißt **orientierbar**, wenn es einen Atlas gibt, so daß alle Kartenwechsel überall positive Jacobische Determinante haben.

(a) S^n ist orientierbar.

(b) Für ungerades n ist $\mathbb{R}P^n$ orientierbar.

(c) Für gerades n ist $\mathbb{R}P^n$ nicht orientierbar.

(d) Eine Mannigfaltigkeit M der Dimension n ist orientierbar genau dann, wenn die Strukturgruppe des Tangentialbündels TM auf $\mathrm{GL}^+(n)$ reduziert.

(e) Ist jede Mannigfaltigkeit, die einen Atlas mit nur zwei Karten besitzt, orientierbar?

Aufgabe 2. (a) $\mathbb{R}P^n$ besitzt für ungerades n einen orientungsumkehrenden Diffeomorphismus (auf sich selbst).

(b) Sei M eine orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Diffeomorphietyp der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}P^n \# M$ hängt nicht davon ab, welche Orientierung man in den beiden Summanden wählt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß $M = \mathbb{R}^n \# ... \# \mathbb{R}^n$ (k Summanden) in den $\mathbb{R}^n$ einbettet. Beschreiben Sie M explizit.

Aufgabe 4. (a) $\mathbb{R}P^2$ ist diffeomorph zu $D^2 \cup_{S^1}$ (Möbiusband).

(b) Auf $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ gibt es ein nirgends verschwindendes Vektorfeld.

Abgabe am 20.1. in der Vorlesung