WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. (a) Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wenn $M\#\mathbb{R}^m$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist, dann ist M homöomorph zu S^m.

(b) Man kann eine unendliche zusammenhängende Summe $M_1\#M_2\#M_3\#\ldots$ von m-Mannigfaltigkeiten definieren, die assoziativ ist und für die gilt

$$S^m\#S^m\#S^m\#\ldots = \mathbb{R}^m.$$

Benutzen Sie dies zusammen mit (a) um zu zeigen, daß gilt: Falls M, N m-Mannigfaltigkeiten sind mit $M\#N$ diffeomorph zu S^m, dann sind M und N homöomorph zu S^m.

Aufgabe 2. Seien $M_1,\ldots,M_k$ zusammenhängende, m-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Dann ist

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \ldots & \# & M_k & \# & M_1 & \# & M_2 & \# & \ldots & \ldots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

diffeomorph zu $M_1\#\ldots\#M_k\#(S^1\times S^{m-1})$.

Aufgabe 3. Das kanonische $\mathbb{C}^1$-Bündel über $S^2=\mathbb{CP}^1$ ist gegeben durch den Totalraum

$$E=\{([z_1:z_2],(\lambda z_1,\lambda z_2))\in\mathbb{CP}^1\times\mathbb{C}^2\ :\ \lambda\in\mathbb{C}\}$$

und Bündelprojektion

$$\begin{array}{rccc} \pi: & E & \longrightarrow & \mathbb{CP}^1 \\ & ([z_1:z_2],(\lambda z_1,\lambda z_2)) & \longmapsto & [z_1:z_2]. \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, daß (E,π,S^2) in der Tat ein $\mathbb{C}^1$-Bündel ist, indem Sie explizit einen Bündelatlas mit zwei Karten angeben. Berechnen Sie die Übergangsfunktionen.

(b) Das zu E assoziierte Sphärenbündel ist definiert durch die Menge SE der Punkte in E mit $|z_1|^2+|z_2|^2=1$, $|\lambda|=1$ und Bündelprojektion $\pi|_{SE}$. Was für eine Mannigfaltigkeit ist der Totalraum SE des Bündels?

Aufgabe 4. $\mathbb{R}^m$ sei mit der Standardorientierung versehen, und $-\mathbb{R}^m$ bezeichne $\mathbb{R}^m$ mit der umgekehrten Orientierung. Dann bettet $\mathbb{R}^m\#(-\mathbb{R}^m)$ in $\mathbb{R}^m\times[-1,1]$ ein und hat $\mathbb{R}^m\setminus D^m$ als Deformationsretrakt (vergl. Blatt 9, Aufgabe 5).

Abgabe am 27.1. in der Vorlesung.