WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 1

Zur Erinnerung: Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, genannt **offene Mengen**, mit den Eigenschaften:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,

(ii) der Durchschnitt je zweier offener Mengen ist offen,

(ii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt **stetig**, falls $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{O}_Y$.

Aufgabe 1. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset M$ heiße offen, falls es zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß die ϵ-Umgebung von x,

$$U_\epsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\} ,$$

noch ganz in U liegt.

Zeigen Sie, daß dies eine Topologie auf M definiert (die **metrische Topologie**).

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ von offenen Mengen heißt **Basis der Topologie**, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. (Insbesondere ist also $\mathcal{O}$ selbst eine Basis der Topologie.)

Zeigen Sie: $\mathbb{R}^n$ mit der metrischen Topologie (bzgl. der euklidischen Metrik) hat eine abzählbare Basis der Topologie.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Mit $X/\sim$ werde die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet. Wir schreiben $[x] \in X/\sim$ für die Äquivalenzklasse von $x \in X$ und $\pi : X \to X/\sim$ für die kanonische Projektion, d.h. $\pi(x) := [x]$. Wir nennen $U \subset X/\sim$ offen, falls $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist.

Zeigen Sie:

(i) Dies definiert eine Topologie auf $X/\sim$, die sogenannte **Quotiententopologie**.

(ii) Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf $X/\sim$ (d.h. die Topologie mit den meisten offenen Mengen), für die π stetig ist.

(iii) Für einen weiteren topologischen Raum Y ist eine Abbildung $f : X/\sim \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Y$ stetig ist.

Aufgabe 4. Es sei $X = [-1, 1] \times [0, 1]$ und $\sim$ die Äquivalenzrelation $(x, 0) \sim (-x, 1)$; die Punkte (x, t) mit $t \neq 0, 1$ seien nur zu sich selbst äquivalent. Machen Sie sich anschaulich klar, daß $X/\sim$ ein **Möbiusband** ist. Beschreiben Sie analog den 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ als Quotientenraum eines Rechtecks. Wie sieht der Quotientenraum $(S^1 \times [0, 1])/\sim$ aus, wenn $\sim$ die Äquivalenzrelation $(z, 0) \sim (\overline{z}, 1)$ bezeichnet, wobei wir S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auffassen?

$\boxed{\text{Abgabe: Dienstag 19.10.2004 in der Vorlesung}}$