WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A \in \mathcal{O}$.

(a) (Zeigen Sie:) Eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn das Urbild $f^{-1}(B)$ jeder abgeschlossenen Menge $B \subset Y$ wieder abgeschlossen ist.

(b) Die **Relativtopologie** oder **induzierte Topologie** $\mathcal{O}_V$ einer Teilmenge $V \subset X$ ist definiert wie folgt:

Für $U \subset V$ gilt $U \in \mathcal{O}_V$ genau dann, falls eine Teilmenge $\widetilde{U} \subset X$, $\widetilde{U} \in \mathcal{O}$ existiert mit $U = \widetilde{U} \cap V$.

(Zeigen Sie:) Falls $A \subset X$ abgeschlossen ist und $B \subset A$ ist abgeschlossen in der Relativtopologie von A in X, so ist B abgeschlossen in X.

(c) Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung und $X = \cup_{i=1}^{n} A_i$ mit $A_i \subset X$ abgeschlossen.

(Zeigen Sie:) Falls $f|_{A_i} : A_i \to Y$ stetig ist für jedes $i = 1, \dots, n$, dann ist auch f stetig.

Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als der Quotientenraum von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ (oder $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$) unter der Äquivalenzrelation

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : (x_0, \dots, x_n) = (\lambda y_0, \dots, \lambda y_n) \, .$$

Die Äquivalenzklasse eines Punktes $(x_0, \dots, x_n)$ bezeichnet man mit **homogenen Koordinaten** $(x_0 : \dots : x_n)$. (Dieser Name erklärt sich daraus, daß $(x_0 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n)$ für $\lambda \in \mathbb{C}^*$.) Man kann $\mathbb{C}P^n$ auch als den Raum der komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1}$ auffassen.

Die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** $\widehat{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}$ ist definiert als die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (d.h. die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{C}$ und einer Menge mit genau einem Element, das wir mit ∞ bezeichnen), mit der folgenden Topologie: Die offenen Mengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ seien genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ und die Mengen der Form $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}$.

Die **stereographische Projektion** Φ von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ vom Nordpol $N = (0, 0, 1)$ auf die Äquatorebene ist definiert wie folgt: Zu einem Punkt $p \in S^2 \setminus \{N\}$ betrachte die Gerade durch p und N. Definiere $\Phi(p)$ als den Schnittpunkt dieser Geraden mit der xy-Ebene.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß $\widehat{\mathbb{C}}$ tatsächlich ein kompakter topologischer Raum ist. (Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. falls für jedes System von offenen Mengen $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ (mit A einer beliebigen Indexmenge) das $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ erfüllt, eine Auswahl von endlich vielen Mengen $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ existiert mit $X = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}P^1 & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (z_0 : z_1) & \mapsto & \begin{cases} z_1/z_0, & \text{falls } z_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } z_0 = 0 \end{cases} \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist. b.w.

Aufgabe 4. Die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ seien mit (x, y, t) bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, daß für $(x, y, t) \in S^2 \setminus \{N\}$ gilt:

$$\Phi(x, y, t) = \left(\frac{x}{1-t}, \frac{y}{1-t}\right) .$$

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} S^2 &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ (x, y, t) &\mapsto \begin{cases} \dfrac{x+iy}{1-t} & \text{für } t \neq 1 \\ \infty & \text{für } t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 5. Definieren Sie analog die stereographische Projektion Ψ vom Südpol $S = (0, 0, -1) \in S^2$ auf die Äquatorebene.

(a) Beschreiben Sie Ψ in expliziten Koordinaten analog zu Aufgabe 4(a).

(b) Berechnen Sie $\Phi \circ \Psi^{-1}$ und $\Psi \circ \Phi^{-1}$. Wo sind diese Abbildungen definiert? Wie schreiben sich diese Abbildungen als komplexe Funktionen, wenn Sie $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren?

(c) Vergleichen Sie diese mit den Funktionen $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}$ und $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ (wo definiert?), wo $\phi_0 : \mathbb{C}P^1 \setminus \{(0:1)\} \to \mathbb{C}, (z_0 : z_1) \mapsto z_1/z_0$ und $\phi_1 : \mathbb{C}P^1 \setminus \{(1:0)\}, (z_0 : z_1) \mapsto z_0/z_1$.

Abgabe: Dienstag 26.10.2004 in der Vorlesung