WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ einen Weg $u : [0,1] \to X$ gibt mit $u(0) = x_0$ und $u(1) = x_1$. Mit $\pi_0(X)$ wird die Menge der Wegkomponenten bezeichnet, d.h. der Quotientenraum von X bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y.$$

Schreibe $[x]$ für die Äquivalenzklasse von x.

(a) Jeder zusammenziehbare Raum X ist einfach zusammenhängend, d.h. X ist wegzusammenhängend und es gilt $\pi_1(X) = \{e\}$.

(b) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es eine wohldefinierte Abbildung $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, definiert durch $f_*[x] = [f(x)]$.

(c) Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ eine Bijektion.

(d) Die Menge $\pi_0(X)$ läßt sich auffassen als die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $S^0 = \{-1, 1\} \to X$, die den Punkt $-1 \in S^0$ auf einen fest gewählten Basispunkt x_0 abbilden.

Aufgabe 2. (a) Ein topologischer Raum ist zusammenziehbar genau dann, wenn er den Homotopietyp eines Punktes besitzt.

(b) Das Möbiusband M sei definiert als

$$M = \big([-1,1] \times [0,1]\big)/(x,0) \sim (-x,1) .$$

Zeigen Sie mit einer expliziten Homotopie, daß S^1 starker Deformationsretrakt von M ist.

(c) Sei x_0 ein beliebiger Punkt in $\mathbb{R}P^n = S^n/x \sim -x$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}P^n \setminus \{x_0\}$ homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}P^{n-1}$ ist.

(d) Es sei

$$X = \{(0,1) + t(x,-1) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le t \le 1, \, x = 0 \text{ oder } x = 1/n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Dann ist $\{(0,0)\}$ Deformationsretrakt von X, aber nicht starker Deformationsretrakt.

Aufgabe 3. (a) Eine stetige Abbildung $f : S^{n-1} \to X$ in einen topologischen Raum X läßt sich genau dann zu einer stetigen Abbildung $F : D^n \to X$ fortsetzen, wenn f nullhomotop ist.

(b) Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Jede stetige Abbildung $D^n \to D^n$ besitzt einen Fixpunkt (Brouwerscher Fixpunktsatz).

(ii) Es gibt keine Retraktion $D^n \to S^{n-1}$.

(iii) Die Identität $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$ ist nicht nullhomotop.

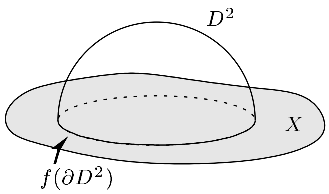
b.w.

(Hinweis: Zeigen Sie z.B. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i), jeweils durch Widerspruch. Für (iii) $\Rightarrow$ (i): Konstruieren Sie aus einer fixpunktfreien Abbildung $D^n \to D^n$ eine stetige Abbildung $D^n \to S^{n-1}$, die eingeschränkt auf S^{n-1} homotop zu $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$ ist.)

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum und $f : S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Definiere

$$X \cup_f D^2 = (X + D^2)/x \sim f(x) \text{ für } x \in S^1 = \partial D^2,$$

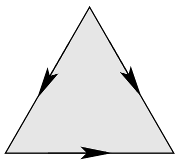
wobei "+" die disjunkte Vereinigung bezeichnet, die auch topologische Summe genannt wird. (Die Topologie auf $X + D^2$ ist dadurch bestimmt, daß X und D^2 offene Teilmengen von $X + D^2$ sind.)



(a) Falls $f, g : S^1 \to X$ homotope Abbildungen sind, so gilt

$$X \cup_f D^2 \simeq X \cup_g D^2 \ .$$

(b) Die Narrenkappe ist der topologische Raum, den man aus einem gleichseitigen Dreieck erhält, indem man die drei Seiten wie im Bild angegeben identifiziert.



Beschreiben Sie die Narrenkappe in der Form $S^1 \cup_f D^2$ mit einer geeigneten Abbildung $f : S^1 \to S^1$ und zeigen Sie mit (a), daß die Narrenkappe zusammenziehbar ist.

Abgabe: Dienstag 2.11.2004 in der Vorlesung