WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Man fasse S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auf. Beschreiben Sie den Homomorphismus $f_*\colon\ \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1, f(1))$, wenn

(i) $f(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\pi/2)}$,

(ii) $f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ für $n \in \mathbb{Z}$,

(iii) $f(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{i\theta}, & 0 \le \theta \le \pi, \\ e^{i(2\pi-\theta)}, & \pi \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$

Aufgabe 2. (a) Seien N und S die Pole (d.h. zwei fest gewählte Antipodenpunkte) der n-Sphäre S^n, $n \ge 2$. Zeigen Sie mittels des Lebesgueschen Überdeckungssatzes, daß jeder Weg in S^n ein endliches Produkt von Wegen ist, die ganz in $S^n \setminus \{N\}$ oder $S^n \setminus \{S\}$ liegen. Schließen Sie daraus, daß $\pi_1(S^n)$ die triviale Gruppe ist.

(b) Beweisen Sie das Ergebnis von (a) mittels des Satzes von Seifert-van Kampen.

(c) Zeigen Sie durch Anheben von Wegen in $\mathbb{R}P^n = S^n/x \sim -x$ nach S^n und mit (a), daß $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ für $n \ge 1$. Was ist $\pi_1(\mathbb{R}P^1)$?

Aufgabe 3. Eine **topologische Gruppe** ist ein topologischer Raum G mit einer Gruppenstruktur, so daß die Multiplikation $\mu\colon\ G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$, und die Invertierungsabbildung $\iota\colon\ G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, stetig sind.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}^+(n)$, die Menge der reellen $(n \times n)$-Matrizen mit positiver Determinante, eine wegzusammenhängende topologische Gruppe ist (bzgl. der Matrixmultiplikation als Gruppenverknüpfung).

(b) Seien u und v Schleifen in einer topologischen Gruppe G mit Basispunkt e, dem Einselement von G. Sei $u * v$ die durch $u * v(s) = \mu(u(s), v(s))$, $s \in [0,1]$, definierte Schleife. Zeigen Sie, daß

$$uv \simeq u * v \simeq vu \ \text{ rel } \{0,1\},$$

und folgern Sie daraus, daß $\pi_1(G,e)$ abelsch ist.

Aufgabe 4. Rechnen Sie explizit nach, daß

$$\partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0$$

für jeden singulären n-Quader $T\colon\ I^n \to X$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie außerdem, daß

$$\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X) \ \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

b.w.

Aufgabe 5. (a) Die Sequenz von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$0 \to \mathbb{Z}_3 \to G \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \overset{\alpha}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

sei exakt. Dann ist α ein Isomorphismus und G ist isomorph zu $\mathbb{Z}_6$.

(b) Eine **kurze exakte Sequenz** abelscher Gruppen ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0.$$

(i) Exaktheit bei A bzw. C ist äquivalent zur Injektivität von α bzw. Surjektivität von β.

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Es gibt einen Homomorphismus $\lambda\colon\ C \to B$, so daß $\beta \circ \lambda = \mathrm{id}_C$.
- Es gibt einen Homomorphismus $\mu\colon\ B \to A$, so daß $\mu \circ \alpha = \mathrm{id}_A$.

Unter diesen Bedingungen sagt man, daß die kurze exakte Sequenz **spaltet**. Zeigen Sie weiter, daß dann $B \cong A \oplus C$.

N.B.: Eine spaltende kurze exakte Sequenz *nicht-abelscher* Gruppen A, B, C entspricht im allgemeinen einem sogenannten *semi-direkten* Produkt von A und C.

(iii) Ist C eine freie abelsche Gruppe, so spaltet jede kurze exakte Sequenz der obigen Form. (Falls Ihnen der allgemeine Fall Schwierigkeiten bereitet, diskutieren Sie zumindest den Fall $C \cong \mathbb{Z}$.)

Abgabe: Dienstag 9.11.2004 in der Vorlesung