WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Zeigen Sie $\operatorname{im} j_* = \ker \partial_*$ und $\operatorname{im} \partial_* = \ker i_*$ in der Homologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \to \ldots$$

eines Paares (X, A).

Aufgabe 2. Sei (X, A) ein Raumpaar und $r : X \to A$ eine Retraktion. Dann gilt

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum. Betrachte den Kettenkomplex $\{\tilde{C}_n, \tilde{\partial}_n\}$, wo $\tilde{C}_n = C_n(X)$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $\tilde{C}_{-1} = \mathbb{Z}$ und $\tilde{C}_n = \{0\}$ für $n \leq -2$. Hier ist $\tilde{\partial}_n$ der übliche Randoperator ∂_n für $n \geq 1$, und $\tilde{\partial}_0 : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ ist der **Augmentationshomomorphismus**, definiert durch $\tilde{\partial}_0(\sum n_i T_i) = \sum n_i$ für eine Kette von singulären 0-Quadern T_i.

(a) Es gilt $\tilde{\partial}_0 \circ \tilde{\partial}_1 = 0$.

Die Homologiegruppen $\tilde{H}_n(X) := \ker \tilde{\partial}_n / \operatorname{im} \tilde{\partial}_{n+1}$ dieses Komplexes heißen **reduzierte** Homologiegruppen von X.

(b) Es gilt $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X)$ für $n \geq 1$.

(c) Die reduzierten 0-Zykel $\tilde{Z}_0(X) = \ker \tilde{\partial}_0$ bilden eine Untergruppe von $Z_0(X) = C_0(X)$, und man hat eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \tilde{H}_0(X) \to H_0(X) \to \mathbb{Z} \to 0 \,.$$

Es folgt $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

(d) Ein Raum X heißt **azyklisch**, falls $\tilde{H}_*(X) = 0$ (d.h. $\tilde{H}_n(X) = \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$). Welche der folgenden Räume sind azyklisch?

(i) $*$ (ii) $\mathbb{R}^3$ (iii) $\emptyset$

Aufgabe 4. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "j_1"] & B_2 \arrow[r, "j_2"] & B_3 \arrow[r, "j_3"] & B_4 \arrow[r, "j_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Bestimmen Sie die minimalen Annahmen an f_1, f_2, f_4, f_5 (bzgl. Injektivität und Surjektivität), die garantieren, daß f_3

(i) injektiv
(ii) surjektiv
(iii) bijektiv

ist. Zeigen Sie durch Beispiele, daß diese Annahmen nicht weiter abgeschwächt werden können.

b.w.

Aufgabe 5. (a) Jede exakte Sequenz der Form

$$0 \to \mathbb{Z}_m \to G \to \mathbb{Z}_n \to 0 \ ,$$

mit m und n teilerfremd, spaltet.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n^2} \to \mathbb{Z}_n \to 0 \ .$$

Spaltet diese Sequenz?

(c) Geben Sie für $n \geq 2$ zwei nicht zueinander isomorphe abelsche Gruppen G an, für die eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}_n \to 0$$

existiert.

Abgabe: Dienstag 16.11.2004 in der Vorlesung