WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

# Algebraische Topologie

Übungsblatt 6

**Aufgabe 1.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{E}_n = \{e = (e_1, \dots, e_n) : \ e_i = 0 \text{ oder } 1\}$. Für einen singulären $n$-Quader $T : I^n \to X$ und $e \in \mathcal{E}_n$ definiere $F_eT : I^n \to X$ durch

$$F_eT(x) = T(\frac{1}{2}(x+e))$$

und $G_eT : I^{n+1} \to X$ durch

$$G_eT(x_1, \dots, x_{n+1}) = T(\eta_{e_1}(x_1, x_{n+1}), \dots, \eta_{e_n}(x_n, x_{n+1})) ,$$

mit $\eta_0 : I^2 \to I$ gegeben durch

$$\eta_0(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2 - x_2}$$

und $\eta_1 : I^2 \to I$ durch

$$\eta_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1+1}{2-x_2} & \text{für } x_1 + x_2 \leq 1, \\ 1 & \text{für } x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$

In der Vorlesung hatten wir bereits gesehen, daß

(i) $A_{n+1}G_eT = F_eT$
(ii) $B_{n+1}G_eT = T$ für $e = (0, \dots, 0)$ und degeneriert sonst.

Zeigen Sie

(iii) Für $e, e' \in \mathcal{E}_n$ mit $e_j = 1$, $e'_j = 0$, $e_i = e'_i$ für $i \neq j$ gilt

$$A_jG_eT = B_jG_{e'}T \ .$$

(iv) Für $e \in \mathcal{E}_n$, $n \geq 2$, $e' = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n) \in \mathcal{E}_{n-1}$ gilt

$$\begin{aligned} A_jG_eT &= G_{e'}A_jT, \text{ falls } e_j = 0, \\ B_jG_eT &= G_{e'}B_jT, \text{ falls } e_j = 1. \end{aligned}$$

Für $n = 1$ sind $A_1G_0T$ und $B_1G_1T$ degeneriert.

Setze

$$\Phi_nT = (-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} G_eT$$

und erweitere linear zu einem Homomorphismus $\Phi_n : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$. Zeigen Sie, daß bis auf degenerierte Quader gilt:

$$\partial_{n+1}\Phi_nT + \Phi_{n-1}\partial_nT = \sum_{e \in \mathcal{E}_n} F_eT - T \ .$$

b.w.

**Aufgabe 2.** (a) $S^{n-1}$ ist Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) Das Komplement eines Punktes in $S^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

(c) Zeigen Sie auf zwei verschiedene Weisen, daß $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist für $n \neq m$:
  (i) Durch Betrachten von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
  (ii) Durch Betrachten der Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 3.** Sei $X$ ein topologischer Hausdorff-Raum.

(a) Für jeden beliebigen Punkt $x \in X$ ist das Komplement $X \setminus \{x\}$ von $\{x\}$ offen.

(b) Die Gruppe $H_n(X, X \setminus \{x\})$ ist isomorph zu $H_n(U, U \setminus \{x\})$ für jede beliebige Umgebung $U$ von $x$ (d.h. jede beliebige Teilmenge $U \subset X$ mit $x \in \mathring{U}$). Diese Gruppe heißt die **$n$-dimensionale lokale Homologiegruppe von $X$ in $x$**.

**Aufgabe 4.** (a) Bestimmen Sie die lokalen Homologiegruppen an verschiedenen Punkten von $D^n$ und zeigen Sie damit, daß jeder Homöomorphismus $f : D^n \to D^n$ den Rand $S^{n-1}$ surjektiv auf sich abbildet.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Homologiegruppen an verschiedenen Punkten des Möbiusbandes $M$ und des Zylinders $Z$ und zeigen Sie damit, daß $M$ und $Z$ nicht homöomorph sind (wenngleich sie den selben Homotopietyp besitzen).

$\boxed{\text{Abgabe: Dienstag 23.11.2004 in der Vorlesung}}$