WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

# Algebraische Topologie

Übungsblatt 7

**Aufgabe 1.** Ein topologischer Raum $X$ heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, offene, disjunkte Teilmengen zerlegen läßt.

(a) $X$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $\emptyset$ und $X$ die einzigen Teilmengen von $X$ sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

(b) Sei $f : X \to Y$ stetig und $X$ zusammenhängend. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

(c) Seien $U_1 \subset U_2 \subset X$ zusammenhängende Teilmengen mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann ist $U_1 \cup U_2$ zusammenhängend.

(d) Für $p, q \in X$ definiere

$$p \sim q \qquad :\Longleftrightarrow \qquad p \text{ und } q \text{ liegen in einer zusammenhängenden Teilmenge von } X.$$

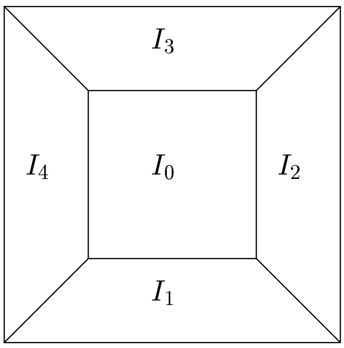
Zeige: Dies definiert eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen **Komponenten** von $X$.

(e) Ein topologischer Raum heißt **lokal wegweise zusammenhängend**, falls jede Umgebung jedes beliebigen Punktes eine wegzusammenhängende Umgebung enthält. Zeigen Sie, daß die Wegkomponenten eines lokal wegweise zusammenhängenden Raumes abgeschlossene, offene Teilmengen sind, die identisch sind mit den Komponenten.

**Aufgabe 2.** (a) Verwenden Sie die Mayer-Vietoris-Sequenz zur Berechnung der Homologiegruppen des Torus und der Kleinschen Flasche, jeweils betrachtet als zwei geeignet miteinander verklebte Zylinder.

(b) Man zeige $S^{r+s+1} \cong (S^r \times D^{s+1}) \cup (D^{r+1} \times S^s)$ mit $(S^r \times D^{s+1}) \cap (D^{r+1} \times S^r) \cong S^r \times S^s$. Berechnen Sie die Homologie von $S^r \times S^s$.

**Aufgabe 3.** Das Einheitsquadrat $I^2$ sei in fünf Teilvierecke $I_0, \ldots, I_4$ wie im Bild unterteilt:




Sei $T : I^2 \to S^2$ ein singulärer 2-Quader mit folgenden Eigenschaften:

- $T$ bildet das Innere von $I_0$ homöomorph auf das Innere von $D^2_+$ ab,
- $T$ bildet $\partial I_0$ homöomorph auf $S^1 = D^2_+ \cap D^2_-$ ab,
- $T$ bildet das Innere von $I_1 \cup \ldots \cup I_4$ homöomorph auf das Innere von $D^2_- \setminus \{S\}$ ab,

- $T$ bildet $\partial I^2$ auf $S$ ab.

Die Teilquader $I_0, \ldots, I_4$ sind homöomorph zu $I^2$, daher kann man $T|I_j$ auffassen als singulären 2-Quader $T_j : I^2 \to S^2$.

(a) Es gilt $[T] = [T_0 + \cdots + T_4] \in H_2(S^2)$.

(b) Zeigen Sie, daß die von dem Zykel $T$ repräsentierte Homologieklasse $[T] \in H_2(S^2)$ ein Erzeuger von $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ ist, indem Sie das Bild $\triangle[T]$ unter dem verbindenden Homomorphismus

$$\triangle : H_2(S^2) \to H_1(S^1)$$

der Mayer-Vietoris-Sequenz bezüglich der Zerlegung $S^2 = (S^2 \setminus \{N\}) \cup (S^2 \setminus \{S\})$ betrachten und ausnutzen, daß $\triangle$ hier ein Isomorphismus ist.

**Aufgabe 4.** Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen topologischen Raum $X$ mit $H_1(X) \cong \mathbb{Z}_n$.

**Aufgabe 5.** (a) Der Abbildungsgrad von $f : S^1 \to S^1$, gegeben durch $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, ist gleich $k$. (Hier $S^1 \subset \mathbb{C}$.)

(b) Beschreiben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ eine stetige Abbildung $S^n \to S^n$ vom Abbildungsgrad $k$.

$\boxed{\text{Abgabe: Dienstag 30.11.2004 in der Vorlesung}}$