WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Jede stetige, injektive Abbildung $f : Y \to X$ mit Y kompakt und X Hausdorffsch ist bereits eine Einbettung, d.h. ein Homöomorphismus von Y auf $f(Y) \subset X$ mit der von X induzierten Topologie. Zeigen Sie dazu zunächst, daß jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes abgeschlossen ist (wie schon in der Vorlesung skizziert).

Aufgabe 2. Eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie und der Eigenschaft, daß jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist.

(a) Seien M und N topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $f : M \to N$ eine injektive, stetige Abbildung. Dann ist f eine **offene Abbildung**, d.h. die Bilder offener Teilmengen in M unter der Abbildung f sind offen in N.

(b) Seien M und N homöomorphe Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Zeigen Sie $m = n$
  (i) durch Verwendung von (a),
  (ii) durch Verwendung lokaler Homologiegruppen (vergl. Übungsblatt 6).

Aufgabe 3. (a) Es seien A und B homöomorphe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Falls A abgeschlossen ist, ist dann auch B abgeschlossen?

(b) Gibt es eine echte Teilmenge von S^n, die homöomorph zu S^n ist?

(c) Gibt es eine stetige, injektive Abbildung $S^n \to \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 4. Seien $\Phi_0 : Q_0(X) \to Q_1(X)$ und $\Phi_1 : Q_1(X) \to Q_2(X)$ die im Beweis von Lemma 4.17 der Vorlesung definierten Homomorphismen.

(a) Es gibt stets einen singulären 3-Quader $\tilde{T} : I^3 \to X$, bei dem die Seiten $A_2\tilde{T}$, $A_3\tilde{T}$, $B_1\tilde{T}$ $B_2\tilde{T}$ und $B_3\tilde{T}$ beliebig vorgeschrieben wurden.

(b) Sei $T : I^2 \to X$ ein singulärer 2-Quader. Sei $\Phi_2 T : I^3 \to X$ ein singulärer 3-Quader, der folgende Randbedingungen erfüllt:
  (i) $B_1\Phi_2 T = T$,
  (ii) $A_i\Phi_2 T = \Phi_1 A_{i-1} T$, $i = 2, 3$,
  (iii) $B_i\Phi_2 T = \Phi_1 B_{i-1} T$, $i = 2, 3$.

(Nach (a) existiert so ein 3-Quader.) Dann gilt

$$\partial\Phi_2 T + \Phi_1 \partial T = T - \sigma_2(T) \qquad (\star)$$

mit $\sigma_2(T) := A_1\Phi_2 T$.

(c) Falls $T \in Q_2(X/x_0)$, definiere

$$(\Phi_2 T)(x_1, x_2, x_3) = T(x_2, x_3) .$$

Dann sind die Randbedingungen in (b) erfüllt, und es gilt $\Phi_2 T \in Q_3(X/x_0)$.

(d) Sei T ein degenerierter 2-Quader, d.h. $T(x_1, x_2)$ hängt entweder nur von x_1 oder nur von x_2 ab. Betrachten wir den Fall, daß $T(x_1, x_2)$ nur von x_2 abhängt. Dann gilt

$$T(x_1, x_2) = A_1T(x_2) = B_1T(x_2) \ .$$

Definiere

$$(\Phi_2 T)(x_1, x_2, x_3) = (\Phi_1 A_1 T)(x_1, x_3) = (\Phi_1 B_1 T)(x_1, x_3) \ .$$

Dann sind die Randbedingungen in (b) erfüllt, und $\Phi_2 T$ ist degeneriert.

Hinweis: Um einzusehen, daß $A_3\Phi_2 T = \Phi_1 A_2 T$, muß man sich z.B. überlegen, daß $\Phi_1 A_2 T(x_1, x_2) = \Phi_1 A_1 T(x_1, 0)$ für alle $x_2 \in I$ (warum?). Beachten Sie dazu, daß

$$\Phi_1 A_1 T(x_1, 0) = A_2 \Phi_1 A_1 T(x_1) = \Phi_0 A_1 A_1 T(x_1) \ .$$

(e) Zeigen Sie $\partial_2\sigma_2 = \sigma_1\partial_2$ direkt aus der Definition von σ_2 oder aus ($\star$).

Dies schließt den Beweis von Lemma 4.17 (für $n = 1$) ab.

$\boxed{\text{Abgabe: Dienstag 7.12.2004 in der Vorlesung}}$