Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Schreiben Sie S^n als die Vereinigung von zwei offenen Mengen, die invariant unter der antipodischen Abbildung sind und benutzen Sie dies, um die Homologie von $\mathbb{R}P^n$ mittels der Mayer-Vietoris-Sequenz zu berechnen.

Aufgabe 2. Stellen Sie den 3-Torus $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ als Vereinigung von zwei offenen Mengen A und B dar mit $A \simeq B \simeq T^2$ und $A \cap B \simeq T^2 + T^2$. Berechnen Sie die Homologie von T^3 mittels der Mayer-Vietoris-Sequenz.

Aufgabe 3. Seien $p > 1$ und q teilerfremde ganze Zahlen. Definiere $L(p,q)$ als den Quotientenraum, den man aus D^3 durch Identifizieren von Punkten auf $S^2 = \partial D^3$ wie folgt erhält: Jeder Punkt auf der oberen Hemisphäre von S^2 wird identifiziert mit dem Punkt auf der unteren Hemisphäre, den man durch Rotation um die vertikale Achse um $2\pi q/p$ und Spiegelung im Äquator erhält. (Punkte in den offenen Hemisphären werden also paarweise identifiziert; auf dem Äquator werden jeweils p Punkte im Abstand $2\pi n/p$, $n = 1, 2, \ldots, p-1$, miteinander identifiziert.) Dieser Raum $L(p,q)$ heißt **Linsenraum**.

(a) Geben Sie $L(p,q)$ die Struktur eines CW-Komplexes mit je einer Zelle in Dimension $0, 1, 2, 3$.

(b) Zeigen Sie

$$H_k(L(p,q)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0, 3 \\ \mathbb{Z}_p & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4. Geben Sie dem 3-Torus die Struktur eines CW-Komplexes und berechnen Sie seine Homologie

(i) induktiv über die singuläre Homologie der Unterskelette (d.h. mittels Korollar 5.2 der Vorlesung)

(ii) mittels zellulärer Homologie.

b.w.

Aufgabe 5. In der Algebra zeigt man, daß jede endlich erzeugte abelsche Gruppe A von der Form

$$A = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$$

ist, d.h. eine endliche direkte Summe von (endlichen oder unendlichen) zyklischen Gruppen. Sei

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von solchen Gruppen. Zeigen Sie, daß dann auch die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{Q}}} B \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta_{\mathbb{Q}}} C \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Warnung: Im allgemeinen ist das Tensorprodukt einer kurzen exakten Sequenz von Rechts-Λ-Moduln mit einem Links-Λ-Modul D nur rechtsexakt, d.h. es folgt nur die Exaktheit von

$$A \otimes D \longrightarrow B \otimes D \longrightarrow C \otimes D \longrightarrow 0\,.$$

Hinweis: Falls Sie mit dem Tensorprodukt nicht vertraut sind: Für A wie oben gilt $A \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^r$. Der Homomorphismus $\alpha_{\mathbb{Q}}$ ist definiert durch $\alpha_{\mathbb{Q}}|_{\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{Q}^r} = \alpha$ und $\mathbb{Q}$-lineare Erweiterung.

$\boxed{\text{Abgabe: Dienstag 14.12.2004 in der Vorlesung}}$