WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (a) Jede endliche Punktmenge in einem topologischen Hausdorffraum ist abgeschlossen.

(b) Sei X ein CW-Komplex und P eine Teilmenge von X mit der Eigenschaft, daß $P \cap \overline{e}$ endlich ist für jede abgeschlossene Zelle $\overline{e}$ von X. Dann ist P abgeschlossen in X.

(c) Sei $P \subset X$ wie in (b). Dann ist die von X induzierte Topologie von P die diskrete Topologie, d.h. jede Teilmenge von P ist offen in P.

(d) Ein CW-Komplex ist kompakt genau dann, wenn er endlich ist.

Aufgabe 2. (a) Berechnen Sie die zelluläre Homologie der Narrenkappe (Blatt 3, Aufgabe 4) aus der dort angegebenen CW-Struktur mit je einer 0-, 1- und 2-Zelle.

(b) Berechnen Sie die Homologie des Raumes, den man aus S^1 durch Anheften einer 2-Zelle mit einer Abbildung $\partial D^2 \to S^1$ vom Grad 2, und einer weiteren 2-Zelle mit Anklebeabbildung vom Grad 3 erhält. Verallgemeinern Sie.

Aufgabe 3. (a) Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $g \in G$ ein Element mit $g \otimes 1 = 0$ in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $ng = 0$ in G.

Hinweis: Verwenden Sie die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen. (vergl. Blatt 9, Aufgabe 5).

(b) Sei G eine beliebige abelsche Gruppe. Sei $g \in G$ ein Element mit $g \otimes 1 = 0$ in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dann ist $(g, 1)$ in $F(G, \mathbb{Q})$ eine endliche Summe von Elementen der Form

$$(g, q_1 + q_2) - (g, q_1) - (g, q_2)$$

und

$$(g_1 + g_2, q) - (g_1, q) - (g_2, q) .$$

(c) Die Aussage in (a) gilt für eine beliebige abelsche Gruppe G.

Aufgabe 4. Sei $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ein beliebiger Kettenkomplex. Betrachten Sie die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n(C_*) \longrightarrow 0 .$$

(a) Sei $F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Dann ist auch

$$F \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}} G \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}} H \otimes \mathbb{Q}$$

exakt. Hinweis: Benutze Aufgabe 3.

(b) Es gilt $H_n(C_* \otimes \mathbb{Q}) \cong H_n(C_*) \otimes \mathbb{Q}$.

Abgabe: Dienstag 21.12.2004 in der Vorlesung