WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. (a) Sei $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m, n > 1, m > 0$, eine stetige Abbildung. Seien $\pi_n : S^n \to \mathbb{R}P^n$ und $\pi_m : S^m \to \mathbb{R}P^m$ die üblichen doppelten Überlagerungen. Zeigen Sie, daß $\bar{f}$ zu einer stetigen Abbildung $f : S^n \to S^m$ anhebt, d.h. $\pi_m \circ f = \bar{f} \circ \pi_n$, indem Sie $\bar{f} \circ \pi_n : S^n \to \mathbb{R}P^m$ betrachten und die Homotopie-Hochhebungseigenschaft der Überlagerung $\pi_m : S^m \to \mathbb{R}P^m$ ausnutzen.

(b) Zeigen Sie, daß $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ für $n > 1$. Jeder geschlossene Weg in $\mathbb{R}P^n$, der den Erzeuger von $\mathbb{R}P^n$ repräsentiert, hebt zu einem Weg in S^n von einem Punkt zu seinem Antipodenpunkt an. Umgekehrt projiziert jeder solche Weg in S^n zu einem Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$.

(c) Für $n > m > 0$ ist $\bar{f}_* : \pi_1(\mathbb{R}P^n) \to \pi_1(\mathbb{R}P^m)$ trivial.

(d) $\mathbb{R}P^2$ ist nicht Retrakt von $\mathbb{R}P^3$.

Aufgabe 2. Die n-Sphäre S^n kann mit $n + 2$ abgeschlossenen Mengen überdeckt werden, von denen keine ein Antipodenpaar enthält.

Aufgabe 3. Seien $A_1, \ldots, A_n$ meßbare Teilmengen von S^n. Dann gibt es einen Großkreis $S^{n-1} \subset S^n$, der jedes A_i in zwei Teilmengen gleichen Maßes zerlegt.

Aufgabe 4. Gegeben seien drei meßbare Teilmengen von S^2. Dann gibt es einen Kreis in S^2 (d.h. die Schnittmenge S^2 mit einer affinen Ebene im $\mathbb{R}^3$), der jede der drei Mengen halbiert.

Lassen sich auch drei beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ mit einem Kreis derart trennen? Geht es mit zwei Teilmengen?

Abgabe: Dienstag 11.1.2005 in der Vorlesung