WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Rechnen Sie in lokalen Koordinaten nach, daß für $\omega \in \Omega^p(M)$ und $\eta \in \Omega^q(M)$ gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

Aufgabe 2. (a) Sei θ die übliche Winkelkoordinate auf S^1. Dann ist $d\theta$ eine wohldefinierte 1-Form auf S^1, die geschlossen, aber nicht exakt ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ die Polarkoordinatenabbildung auf der punktierten Ebene. Dann gilt

(i) $f^*\left(\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\right) = d\theta,$

(ii) $f^*(x\,dx + y\,dy) = r\,dr$.

Aufgabe 3. (a) Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Mit E_i, $i = 1, \ldots, n$, sei das Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, das jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den Tangentialvektor $e_i \in T_x\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$ zuordnet, aufgefaßt als der Geschwindigkeitsvektor in $t = 0$ der Kurve

$$\gamma(t) = x + te_i\ .$$

Jedes andere Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$ ist dann von der Form

$$X(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x)\, E_i\ .$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Definiere die Richtungsableitung $X(f)$ von f in Richtung von X durch

$$X(f)(x) = d_x f(X(x))\ ,$$

d.h. $X(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Funktion, die jedem $x \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung von $X(x)$ zuordnet. Man zeige

$$X(f) = \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f)\ .$$

Dies erklärt, warum man die Vektorfelder E_i sinnvollerweise mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bezeichnet.

(b) Sei $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$ die äußere Ableitung der 0-Form $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ Dann gilt $df(X) = X(f)$ für jedes Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$. Dies erlaubt eine koordinatenfreie Definition von df.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Man berechne die äußere Ableitung der folgenden Differentialformen:

(i) $e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy$ auf dem $\mathbb{R}^2$

(ii) $x\, dy \wedge dz + y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy$ auf dem $\mathbb{R}^3$.

(b) Sei $\omega = y\, dx \wedge dy$ auf dem $\mathbb{R}^2$. Man bestimme alle 1-Formen η, für die $d\eta = \omega$ gilt.

(c) Sei $\eta = (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$ auf dem $\mathbb{R}^2$ und $T : I \to \mathbb{R}^2$ der singuläre 1-Quader $T(x) = (x, x^2)$, $x \in I$. Man berechne

$$\int_T \eta := \int_I T^* \eta.$$

(d) Zeigen Sie allgemein, daß für eine 1-Form η auf dem $\mathbb{R}^n$ und einen (glatten) singulären 1-Quader $T : I \to \mathbb{R}^n$ das Integral $\int_T \eta$ gleich dem in der Vorlesung Analysis III definierten Kurvenintegral $\int_0^1 \eta_{T(t)}(T'(t))\, dt$ ist.

Abgabe: Dienstag 18.1.2005 in der Vorlesung