WS 2004/2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Algebraische Topologie

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Sei ω eine geschlossene p-Form auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M mit $\int_c \omega = 0$ für jeden glatten p-Zykel c in M. Dann ist ω exakt.

Aufgabe 2. (a) Sei $\omega = f(x)\,dx$ eine 1-Form auf dem Intervall $[0,1]$ mit $f(0) = f(1)$. Dann gibt es eine reelle Zahl a und eine Funktion g auf $[0,1]$ mit $g(0) = g(1)$, so daß

$$\omega = a\,dx + dg$$

(b) Sei ω eine geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und η die Windungsform

$$\eta = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\ .$$

Zeigen Sie, daß $d\eta = 0$ und daß es eine reelle Zahl a und eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\omega = a\,\eta + dg\ .$$

Es folgt, daß $[\eta]$ ein Erzeuger von $H^1_\Omega(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ ist.

<u>Hinweis:</u> Man betrachte die zurückgezogenen Formen $f^*\omega$, $f^*\eta$ unter der Polarkoordinatenabbildung $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ und wende (a) auf den $d\theta$-Anteil an. Alternativ, betrachte den 1-Zykel $T(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 3. Sei $\eta = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + a_3\,dx_3$ eine 1-Form auf dem $\mathbb{R}^3$, und

$$\omega = b_1\,dx_2 \wedge dx_3 + b_2\,dx_3 \wedge dx_1 + b_3\,dx_1 \wedge dx_2$$

eine 2-Form.

(a) Berechnen Sie $d\eta$ und $d\omega$ und stellen Sie eine Beziehung auf zu Divergenz und Rotation von (differenzierbaren) Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^3$. (Unter der kanonischen Identifikation des Tangentialraumes $T_x\mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{R}^3$ für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach eine Abbildung $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$.)

(b) Folgern Sie aus dem Satz von de Rham, daß für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ mit $H_2(U) = 0$ gilt: Ist $\mathbf{F}$ ein inkompressibles Vektorfeld auf U, d.h. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, dann $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$ für ein geeignetes Vektorfeld $\mathbf{G}$ auf U.

(c) Betrachte den singulären 2-Quader

$$T : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

definiert durch

$$T(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\ ,$$

sowie die 2-Form

$$\omega = \frac{1}{\|x\|^3}\left(x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2\right)\ ,$$

mit $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

b.w.

(i) Zeigen Sie, daß $d\omega = 0$ und $\partial T = 0$.
(ii) Berechnen Sie $\int_T \omega$.
(iii) Folgern Sie aus (i) und (ii): $[\omega] \neq 0$ in $H^2_\Omega(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ und $[T] \neq 0$ in $H_2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$.

(d) Sei $\mathbf{F}$ ein inkompressibles Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine reelle Zahl a und ein Vektorfeld $\mathbf{G}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G} + \frac{a}{\|x\|^3}\,(x_1, x_2, x_3)\ .$$

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe soll ein alternativer Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes mittels Differentialformen gegeben werden. Angenommen, $F : D^n \to S^{n-1} = \partial D^n \subset \mathbb{R}^n$ ist eine glatte Retraktion, $F = (F_1, \ldots, F_n)$.

(a) Man zeige, daß das Gleichungssystem

$$J^t_F(x) \cdot \mathbf{v} = 0$$

für jedes $x \in D^n$ eine nichttriviale Lösung $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hat. Hier bezeichnet $J^t_F(x)$ die transponierte Jacobische Matrix von F. Es folgt $\det J_F(x) = 0$.

(b) Setze $\omega = F_1\, dF_2 \wedge \ldots \wedge dF_n$. Zeigen Sie durch Betrachtung der Integrale $\int_{S^{n-1}} \omega$ und $\int_{D^n} d\omega$, daß die Annahme der Existenz von F zu einem Widerspruch führt.

Aufgabe 5. In $\mathbb{C}P^2$ mit homogenen Koordinaten $(z_0 : z_1 : z_2)$ betrachte man die Kopien von $\mathbb{C}P^1$ definiert durch

$$\mathbb{C}P^1_0 := \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \,:\, z_2 = 0\}$$

bzw.

$$\mathbb{C}P^1_\infty := \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 \,:\, z_0 = 0\}.$$

Zeigen Sie, daß die durch diese orientierten Untermannigfaltigkeiten repräsentierten Homologieklassen $[\mathbb{C}P^1_0]$ bzw. $[\mathbb{C}P^1_\infty]$ in $H_2(\mathbb{C}P^2)$ gleich sind

(i) mittels de Rham Cohomologie,
(ii) durch Angabe einer singulären 3–Kette u in $\mathbb{C}P^2$ mit $\partial u = \mathbb{C}P^1_0 - \mathbb{C}P^1_\infty$.

Abgabe: Dienstag 25.1.2005 in der Vorlesung