Differentialtopologie I

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Seien $h_i^\pm$ die in der Vorlesung definierten Karten für $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, d.h.

$$\begin{array}{cccc} h_i^\pm & : & U_i^\pm & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (x_1,\ldots,x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}) \end{array}$$

wobei $U_i^\pm = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n : \pm x_i > 0\}$. Sei $h^\pm$ die stereographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol auf die Äquatorebene, d.h. für $p \in S^n$, $p \neq (0,\ldots,0,1) = N$ ("Nordpol"), ist $h^+(p)$ definiert als der Schnittpunkt der Geraden durch N und p mit der "Äquatorebene" $\{x_{n+1} = 0\}$; analog für h^-. Setze $U^+ := S^n \setminus \{N\}$. Analog bezeichne U^- die n–Sphäre ohne den "Südpol".

(a) Zeigen Sie:
$$h^+(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}\,(x_1,\ldots,x_n,0)$$
Wie sieht die entsprechende Formel für h^- aus?

(b) Die Karten $(U^\pm, h^\pm)$ definieren einen differenzierbaren Atlas für S^n.

(c) Die Atlanten $\{(U_i^\pm, h_i^\pm), i = 1,\ldots,n+1\}$ und $\{(U^\pm, h^\pm)\}$ definieren die gleiche differenzierbare Struktur auf S^n.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Es bezeichne $[x] \in X/\sim$ die Äquivalenzklasse von $x \in X$ im Quotientenraum $X/\sim$ aller solcher Äquivalenzklassen. Mit $\pi\colon X \to X/\sim$ sei die Quotientenabbildung $x \mapsto [x]$ bezeichnet. Eine Teilmenge $U \subset X/\sim$ heißt **offen in der Quotiententopologie** genau dann, falls $\pi^{-1}(U)$ offen ist in X.

(a) Dies definiert in der Tat eine Topologie auf $X/\sim$.

(b) Dies ist die feinste Topologie auf $X/\sim$ (d.h. die Topologie mit den meisten offenen Mengen), für die π stetig ist.

b.w.

Aufgabe 3. (a) In einem Hausdorff-Raum sind einpunktige Mengen abgeschlossen.

(b) Sei X ein topologischer Hausdorff-Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Eine notwendige Bedingung für die Hausdorff-Eigenschaft des Quotientenraumes $X/\sim$ ist die Abgeschlossenheit aller Äquivalenzklassen in X.

(c) Hier ist ein Beispiel, das zeigt, daß die Bedingung in (b) nicht hinreichend ist. Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen Topologie. Definiere zwei Äquivalenzrelationen wie folgt:

(1) $(x, y) \sim_1 (x', y')$ genau dann, falls

- $x = x' \leq -\pi/2$, oder
- $x = x' \geq \pi/2$, oder
- $x, x' \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $y - \tan x = y' - \tan x'$.

(2) $(x, y) \sim_2 (x', y')$ genau dann, falls

- $x = x' \leq -\pi/2$, oder
- $x = x' \geq \pi/2$, oder
- $x, x' \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $y - x \tan x = y' - x' \tan x'$.

Zeichnen Sie die Äquivalenzklassen in $\mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, daß diese allesamt abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind. Begründen Sie, welcher der Quotientenräume $X/\sim_1$ und $X/\sim_2$ Hausdorffsch ist.

Aufgabe 4. Betrachte S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}P^1$ als den Quotientenraum von S^1 unter der Identifikation $z \sim -z$, mit der in der Vorlesung beschriebenen Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann definiert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^1 & \longrightarrow & S^1 \\ [z] & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

einen Diffeomorphismus.

Abgabe: Mittwoch 2.11.05 in der Vorlesung.