WS 2005/2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Seien M und N Mannigfaltigkeiten mit differenzierbarem Atlas $\{(U_\alpha, h_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ bzw. $\{(V_\beta, k_\beta)\colon \beta \in B\}$. Dann ist $M \times N$ eine Mannigfaltigkeit mit differenzierbarem Atlas $\{(U_\alpha \times V_\beta, h_\alpha \times k_\beta)\colon \alpha \in A, \beta \in B\}$. Die dadurch gegebene differenzierbare Struktur auf $M \times N$ hängt nur von den differenzierbaren Strukturen von M und N ab.

Aufgabe 2. Der komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ ist der Quotient von $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ unter der diagonalen Wirkung der Gruppe $S^1 \subset \mathbb{C}$, d.h.

$$\mathbb{CP}^n = \{[x_0 : \ldots : x_n]\colon (x_0, \ldots, x_n) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}\}$$

wobei $[x_0 : \ldots : x_n] = [y_0 : \ldots : y_n]$ genau dann gilt, wenn es ein $\lambda \in S^1$ gibt mit $(x_0, \ldots, x_n) = \lambda(y_0, \ldots, y_n)$.

(a) Geben Sie $\mathbb{CP}^n$ eine Topologie und die Struktur einer $2n$–dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

(b) Kann man auf $\mathbb{CP}^n$ sinnvoll von holomorphen oder meromorphen Funktionen sprechen?

(c) $\mathbb{CP}^1$ ist diffeomorph zu S^2.

Aufgabe 3. (a) Falls $f\colon N \to M$ und $g\colon M \to P$ Einbettungen sind, dann auch $g \circ f\colon N \to P$.

(b) Falls $f_i\colon N_i \to M_i$ Einbettungen sind, $i = 1, 2$, dann auch $f_1 \times f_2\colon N_1 \times N_2 \to M_1 \times M_2$, definiert durch $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$.

(c) $S^n \times \mathbb{R}$ kann in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet werden.

(d) $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ kann in den $\mathbb{R}^{n_1 + \cdots + n_k + 1}$ eingebettet werden.

(e) Beschreiben Sie eine Einbettung $S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ mit elementaren Funktionen.

Aufgabe 4. Im 4–dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ wird die Standardbasis

$$\mathbf{1} := (1, 0, 0, 0),\ \mathbf{i} := (0, 1, 0, 0),\ \mathbf{j} := (0, 0, 1, 0),\ \mathbf{k} := (0, 0, 0, 1)$$

ausgezeichnet, wobei wir den durch $\mathbf{1}$ aufgespannten Teilraum in kanonischer Weise mit $\mathbb{R}$ identifizieren. Wir erklären auf $\mathbb{R}^4$ eine Multiplikation, indem wir

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$$

und das Distributivgesetz fordern. Für $q = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ nennt man a_0 den **Realteil** von q und $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ den **Imaginärteil**. Wir identifizieren den Vektorraum der rein imaginären Elemente von $\mathbb{R}^4$ in kanonischer Weise mit $\mathbb{R}^3$. Das zu q **konjugierte Element** ist $\overline{q} := a_0\mathbf{1} - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}$. Die **Norm** von q ist $|q| := \sqrt{q\overline{q}}$.

(a) Dies definiert auf $\mathbb{R}^4$ die Struktur einer reellen assoziativen, nicht-kommutativen Divisionsalgebra. Dazu ist im wesentlichen nur die Assoziativität der Multiplikation zu begründen und zu zeigen, daß zu jedem Element $q \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses existiert. Man nennt diese Divisionsalgebra die Hamiltonschen **Quaternionen** und schreibt dafür $\mathbb{H}$.

b.w.

(b) In $\mathbb{H}$ gelten die folgenden Rechenregeln:

(i) $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$.

(ii) Für $q, u \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ gilt $qu - uq = 2\, q \times u$, wobei $\times$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Gilt außerdem $|q| = 1$, so hat man die Identität $quq = u - 2\langle q, u\rangle q$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(iii) Es bezeichne $S^3 \subset \mathbb{H}$ die Einheitssphäre bezüglich der Norm $|\cdot|$. Jedes Quaternion $a \in S^3 \setminus \{\pm \mathbf{1}\}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$a = \cos(\theta/2) \cdot \mathbf{1} + \sin(\theta/2) \cdot q$$

mit $q \in \mathbb{R}^3$, $|q| = 1$, und $0 < \theta < 2\pi$.

(iv) Für $a \in S^3$ definiert die Vorschrift $u \mapsto f_a(u) := au\overline{a}$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, und es gilt $f_a \in \mathrm{SO}(3)$.

(v) Wählt man zu $a \in S^3 \setminus \{\pm \mathbf{1}\}$ die Größen q, θ wie in (iii), so gilt

$$f_a(u) = \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot q \times u + (1 - \cos\theta)\langle q, u\rangle q \ \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^3.$$

Insbesondere gilt $f_a(q) = q$ und $\langle f_a(u), u\rangle = \cos\theta$ für alle $u \in \mathbb{R}^3$ mit $|u| = 1$ und $\langle u, q\rangle = 0$.

(c) Die Abbildung $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$, definiert durch $a \mapsto f_a$, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\{\pm \mathbf{1}\}$.

(d) $\mathrm{SO}(3)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{RP}^3$.

Hinweis: Die Abbildung aus (c) induziert eine Abbildung $\mathbb{RP}^3 \to \mathrm{SO}(3)$. Zeigen Sie zunächst, daß diese Abbildung ein Homöomorphismus ist (z.B. unter Ausnutzung der Kompaktheit von $\mathbb{RP}^3$), der differenzierbar ist. Rechnen Sie dann an einem Punkt nach, daß die Abbildung vollen Rang hat – aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Abbildung kann man daraus schließen, daß die Abbildung überall vollen Rang hat und damit ein Diffeomorphismus ist.

Abgabe: Mittwoch 9.11.05 in der Vorlesung.