WS 2005/2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie I

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Die Lorentz-Gruppe $\mathrm{O}(3,1)$, die in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt, ist die Gruppe der reellen (4×4)–Matrizen A, die der Gleichung $A^t D A = D$ genügen, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $(1,1,1,-1)$ ist. Zeigen Sie, daß $\mathrm{O}(3,1)$ eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit des Raumes $\mathcal{M}(4\times 4)\cong\mathbb{R}^{16}$ aller reellen (4×4)–Matrizen ist.

Aufgabe 2. Sei $M\times N$ das Produkt zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten M, N, mit Mannigfaltigkeitsstruktur wie in Aufgabe 1 von Blatt 3 erklärt.

(a) Für jeden Punkt $(p,q)\in M\times N$ gilt

$$T_{(p,q)}(M\times N) = T_pM \times T_qN.$$

(b) Sei $f\colon M\to N$ eine differenzierbare Abbildung und $F\colon M\to M\times N$ die durch $F(p) = (p, f(p))$ definierte Abbildung.

(i) Die Abbildung F ist differenzierbar, und es gilt

$$T_pF(X) = (X, T_pf(X))$$

für $p\in M$, $X\in T_pM$.

(ii) Der Tangentialraum an den Graphen von f im Punkt $(p,f(p))$ ist der Graph der Abbildung $T_pf\colon T_pM\to T_{f(p)}N$.

Aufgabe 3. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind nicht diffeomorph für $n\neq m$.

Aufgabe 4. Für $A\in\mathcal{M}(n\times n)$ definiere

$$\gamma(t) := \exp(tA) := \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu A^\nu}{\nu!}.$$

(a) Diese Reihe konvergiert für alle $A\in\mathcal{M}(n\times n)$ (oder auch alle komplexen $(n\times n)$–Matrizen).

(b) Es gilt $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{trace}(A))$.

(c) $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$.

(d) Die Abbildung $t\mapsto\gamma(t)$ ist differenzierbar, und es gilt $\gamma'(0) := T_0\gamma(\partial_t) = A$.

(e) Falls A schiefsymmetrisch ist, so liegt $\gamma(t)$ in $\mathrm{SO}(n)$.

(f) Der Tangentialraum $T_I\mathrm{SO}(n)\subset T_I\mathcal{M}(n\times n)\cong\mathbb{R}^{n^2}$ der Untermannigfaltigkeit $\mathrm{SO}(n)\subset\mathcal{M}(n\times n)\cong\mathbb{R}^{n^2}$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet, ist der Vektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

(g) Was ist $T_B\mathrm{SO}(n)$ für ein beliebiges $B\in\mathrm{SO}(n)$?

Abgabe: Mittwoch 16.11.05 in der Vorlesung.