WS 2005/2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (a) Die in der Vorlesung definierte Topologie auf dem Tangentialbündel TM ist Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis.

(b) $T(M \times N)$ ist diffeomorph zu $TM \times TN$.

(c) Falls M kompakt ist, so ist auch das Einheitstangentialbündel $T_1 M$ kompakt.

Aufgabe 2. Seien X und Y glatte Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M. Dann definiert, wie in der Vorlesung gezeigt, die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & X_p f \end{array}$$

eine differenzierbare Funktion Xf auf M; analog für Y. Definiere eine Funktion auf M durch

$$p \longmapsto [X,Y]_p f := X_p(Yf) - Y_p(Xf)\,.$$

Zeigen Sie, daß die Zuordnung $p \longmapsto [X,Y]_p$ ein glattes Vektorfeld auf M definiert

(a) indem Sie zeigen, daß $[X,Y]_p$ für jedes p eine Derivation von $\mathcal{E}_M(p)$ ist.

(b) durch Berechnung von $[X,Y]$ in lokalen Koordinaten.

Das Vektorfeld $[X,Y]$ heißt **Lie-Klammer** von X und Y.

(c) Es gilt die Jacobi-Identität

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

für beliebige glatte Vektorfelder X, Y, Z auf M.

Aufgabe 3. Das Tangentialbündel TM einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt **trivial**, falls es einen Diffeomorphismus

$$TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}^m$$

gibt, der T_pM linear auf $\{p\} \times \mathbb{R}^m$ abbildet für jedes $p \in M$.

(a) TM ist trivial genau dann, wenn es m Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ auf M gibt, so daß die Vektoren $X_1(p), \ldots, X_m(p)$ linear unabhängig sind für jedes $p \in M$. (Man nennt solche Vektorfelder **punktweise linear unabhängig**.)

(b) $T\mathbb{R}^m$ ist trivial.

(c) $T\mathrm{S}^1$ und $T\mathrm{S}^3$ sind trivial. (Hinweis: $\mathrm{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{H}$)

Aufgabe 4. Die spezielle orthogonale Gruppe SO(3) wirkt auf $\mathrm{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(3) & \times & \mathrm{S}^2 & \longrightarrow & \mathrm{S}^2 \\ (\,\alpha & , & p\,) & \longmapsto & \alpha(p) \end{array},$$

d.h. $\alpha(\beta(p)) = (\alpha\beta)(p)$.

(a) Dies induziert eine Wirkung auf dem Einheitstangentialbündel $T_1\mathrm{S}^2$ durch

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(3) & \times & T_1\mathrm{S}^2 & \longrightarrow & T_1\mathrm{S}^2 \\ (\,\alpha & , & X\,) & \longmapsto & T\alpha(X) \end{array}.$$

(b) Sei X_0 ein fest gewählter Einheitsvektor in einem Punkt $p_0 \in \mathrm{S}^2$. Dann definiert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(3) & \longrightarrow & T_1\mathrm{S}^2 \\ \alpha & \longmapsto & T\alpha(X_0) \end{array}$$

einen Diffeomorphismus.

Abgabe: Mittwoch 23.11.05 in der Vorlesung.