WS 2005/2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei T^*M das Kotangentialbündel einer m-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, und $\pi\colon\ T^*M \longrightarrow M$ die natürliche Projektion. Betrachte das folgende kommutative Diagramm, in welchem die horizontalen Abbildungen die natürlichen Projektionen der Tangentialbündel sind:

$$\begin{tikzcd} T(T^*M) \arrow[r] \arrow[d, "T\pi"'] & T^*M \arrow[d, "\pi"] \\ TM \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Definiere eine 1-Form auf der Mannigfaltigkeit T^*M, d.h. einen Schnitt λ des Vektorbündels $T^*(T^*M) \longrightarrow T^*M$, durch

$$\lambda_\alpha(X) := \alpha(T_\alpha\pi(X))$$

für $\alpha \in T^*M$, $X \in T_\alpha T^*M$.

(a) Verifizieren Sie, daß die Zuordnung $\alpha \longmapsto \lambda_\alpha$ in der Tat einen Schnitt des Kontangentialbündels $T^*(T^*M) \longrightarrow T^*M$ von T^*M definiert.

(b) Seien $(q_1, \ldots, q_m)$ lokale Koordinaten auf M und $(p_1, \ldots, p_m)$ die zugehörigen dualen Koordinaten in den Fasern von T^*M; mit anderen Worten: Falls $q \in M$ in einer lokalen Karte durch die Koordinaten $(q_1, \ldots, q_m)$ beschrieben ist, so bezeichnen die Koordinaten $(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$ den Kotangentialvektor

$$\begin{array}{cccc} \Big(\sum_{i=1}^m p_i\, dq_i\Big)_q\colon & T_qM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \sum_{i=1}^m X_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \longmapsto & \sum_{i=1}^m p_i X_i. \end{array}$$

Zeigen Sie, daß λ in diesen lokalen Koordinaten beschrieben wird durch

$$\lambda_{(q_1,\ldots,q_m,p_1,\ldots,p_m)} = \sum_{i=1}^m p_i\, dq_i\,.$$

(c) Für jede 1-Form α auf M, aufgefaßt als Abbildung $\alpha\colon\ M \longrightarrow T^*M$, gilt $\alpha = \alpha^*\lambda$.

Bemerkung. λ heißt **Liouville-Form**. In der klassischen Mechanik beschreibt M den Konfigurationsraum eines mechanischen Systems und T^*M dessen Phasenraum (= Raum aller möglichen Positionen und Impulse des mechanischen Systems). Die 1-Form λ bildet den Ausgangspunkt für den **Hamilton-Formalismus**. Zu einer **Hamilton-Funktion** $H\colon\ T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert man ein **Hamiltonsches Vektorfeld** X_H auf T^*M durch

$$d\lambda(X_H, \cdot) = -dH\,.$$

b.w.

Hier ist $d\lambda$ die äußere Ableitung von λ, d.h. die 2-Form, die in lokalen Koordinaten durch

$$d\lambda = \sum_{i=1}^{m} dp_i \wedge dq_i$$

gegeben ist. Der Fluß von X_H beschreibt dann die zeitliche Entwicklung des mechanischen Systems.

Aufgabe 2. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \longrightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Das Differential $Tf\colon TM \longrightarrow TN$ von f ist differenzierbar.

(b) Ist M zusammenhängend und das Differential Tf von f überall Null, so muß f konstant sein.

(c) Ist f eine Einbettung, so auch Tf.

Aufgabe 3. Geben Sie durch ein Bild, möglichst aber auch durch eine explizite Beschreibung in geeigneten Karten, ein differenzierbares Vektorfeld auf S^2 an, das

(a) genau zwei Nullstellen hat.

(b) genau eine Nustelle hat.

Aufgabe 4. (a) Konstruieren Sie eine differenzierbare (d.h. C^∞) Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Menge kritischer Werte dicht in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Beschreiben Sie eine differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, daß die Menge

$$f(\{t \in \mathbb{R} \,:\, t \geq k\})$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ ganz $\mathbb{Q}^n$ enthält.

Abgabe: Mittwoch 30.11.05 in der Vorlesung.