WS 2005/2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Angenommen, $f\colon \mathrm{D}^n \longrightarrow \mathrm{D}^n$ ist ein fixpunktfreie stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß man dann auch eine fixpunktfreie differenzierbare Abbildung $g\colon \mathrm{D}^n \longrightarrow \mathrm{D}^n$ konstruieren könnte. (Dies liefert einen alternativen Weg, die Existenz eines solchen f auszuschließen, da die Konstruktion aus der Vorlesung angewandt auf g direkt eine differenzierbare Retraktion $\mathrm{D}^n \longrightarrow \mathrm{S}^{n-1}$ liefern würde.)

Aufgabe 2. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

(a) Seien $f, g \in C^\infty(M, \mathrm{S}^n)$ mit $||f(p) - g(p)|| < 2$ für alle $p \in M$. (Hier $\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und $||\cdot||$ ist die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$.) Dann sind f und g homotop zueinander.

(b) Seien $f, g \in C^\infty(M, N)$ **stetig** homotope Abbildungen, d.h. es existiere eine stetige Abbildung

$$F\colon M \times [0,1] \longrightarrow N$$

mit $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in M$. Dann sind f und g auch differenzierbar homotop.

Aufgabe 3. Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Jede differenzierbare Abbildung $f\colon M \longrightarrow \mathrm{S}^n$ mit $n > m$ ist homotop zur konstanten Abbildung.

(b) Für n ungerade ist die Antipodenabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}^n & \longrightarrow & \mathrm{S}^n \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

homotop zur identischen Abbildung.

Aufgabe 4. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (d.h. Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik) mit Rand ∂M.

(a) Für $p \in \partial M$ und $h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ eine Karte um p mit $h(p) = 0$ ist

$$T_p h\colon T_p M \longrightarrow T_0 \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$$

ein Isomorphismus. Definiere

$$H_p M := (T_p h)^{-1}(\mathbb{R}^n_+).$$

Zeigen Sie, daß $H_p M$ nicht von der Wahl der Karte h abhängt.

(b) Beweisen Sie, daß es für $p \in \partial M$ genau zwei zu $T_p(\partial M)$ orthogonale Einheitsvektoren in $T_p M$ gibt. Derjenige dieser zwei Vektoren, der **nicht** in $H_p(M)$ liegt, heißt der **äußere Normalenvektor** $\mathbf{n}(p)$ des Randes. Begründen Sie, warum $\mathbf{n}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf ∂M definiert.

b.w.

(c) Sei $p \in \partial M$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von p in M und eine differenzierbare Funktion $f\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \partial U$.
- $T_x f(\mathbf{n}(x)) > 0$ für $x \in \partial U$.

Abgabe: Mittwoch 14.12.05 in der Vorlesung.