WS 2005/2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Seien M, N und P geschlossene, zusammenhängende, orientierte Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension. Für $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ gilt

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$$

Aufgabe 2.

(a) Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ eine komplexes Polynom vom Grad n. Dann erhält man durch homogenisieren, d.h. mit

$$P(z,w) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} w + \cdots + a_1 z w^{n-1} + a_0 w^n,$$

eine differenzierbare Abbildung $P\colon \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ vom Abbildungsgrad n. (Nach Aufgabe 2 von Blatt 3 ist $\mathbb{CP}^1$ diffeomorph zu S^2.)

(b) Was ist entsprechend der Grad einer Abbildung $S^2 \longrightarrow S^2$, die durch eine rationale Funktion $p(z)/q(z)$ gegeben ist?

(c) Es gibt eine komplexe Zahl z mit $z^{2005} + \cos(|z|^2)(1 + 42z^4) = 0$.

Aufgabe 3.

(a) Jede Abbildung $\mathrm{S}^n \longrightarrow \mathrm{S}^n$ vom Grad ungleich $(-1)^{n+1}$ hat einen Fixpunkt.

(b) Jede Abbildung $f\colon \mathrm{S}^n \longrightarrow \mathrm{S}^n$ mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in S^n$ hat geraden Grad.

(c) Sei $f\colon \mathrm{S}^n \longrightarrow \mathrm{S}^n$ eine Abbildung von ungeradem Grad. Dann gibt es ein Antipodenpaar, das auf ein Antipodenpaar abbildet, d.h. ein $x \in \mathrm{S}^n$ mit $f(-x) = -f(x)$.

(d) Benutzen Sie den Abbildungsgrad um zu zeigen, daß die 2-Sphäre S^2 nicht diffeomorph zum 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ ist.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Seien U, V nichtkompakte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Rand und $f\colon U \longrightarrow V$ eine eigentliche differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie, daß man auch in dieser Situation sinnvoll vom Abbildungsgrad von f sprechen kann.

(b) (Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Algebra) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Teilmenge und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Weiter gelte:

(i) f ist eigentlich.

(ii) Außerhalb einer kompakten Teilmenge ändert die Jacobische Determinante $\det J_f(x)$ ihr Vorzeichen nicht und ist nicht identisch Null.

Dann ist f surjektiv. Insbesondere hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung.

(c) Seien $f_1, \ldots, f_n$ reelle, nichtkonstante Polynome in $n \geq 2$ Variablen. Schreibe $f_k = h_k + r_k$ mit einem homogenen Polynom h_k vom Grad $d_k > 0$ und einem Polynom r_k von kleinerem Grad. Angenommen, $x = (0, \ldots, 0)$ ist die einzige Lösung des Gleichungssystems $h_1(x) = \cdots = h_n(x) = 0$. Weiter gelte $\det(\partial h_i/\partial x_j) \neq 0$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann hat das Gleichungssystem $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$ eine Lösung in $\mathbb{R}^n$.

Abgabe: Mittwoch 21.12.05 in der Vorlesung.