WS 2005/2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine kompakte, zusammenhängende n-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis des verallgemeinerten **Jordanschen Kurvensatzes**: $\mathbb{R}^{n+1} \backslash M$ besitzt zwei Zusammenhangskomponenten, eine beschränkte und eine unbeschränkte.

Zeigen Sie dazu folgendes:

(a) Sei $z \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash M$. Dann existiert zu jedem $x \in M$ und jeder Umgebung U von x in $\mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt $p \in U$, der mit z durch einen Weg verbunden werden kann, der M nicht schneidet. (**Hinweis:** Zeigen Sie, daß die Menge der Punkte $x \in M$, für die diese Bedingung wahr ist, eine nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge von M ist.)

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^{n+1} \backslash M$ höchstens zwei Komponenten besitzt.

(c) Definiere für jedes $z \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash M$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \sigma_z: & M & \longrightarrow & \mathrm{S}^n \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x-z}{\|x-z\|}. \end{array}$$

Gehören z_0 und z_1 zur gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^{n+1} \backslash M$, so gilt

$$\deg_2(\sigma_{z_0}) = \deg_2(\sigma_{z_1}).$$

(d) Sei $z \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash M$ und $v \in \mathrm{S}^n$, und es bezeichne γ den **Strahl an z in Richtung v**:

$$\gamma = \{z + tv : \ t \geq 0\}.$$

Der Strahl γ ist genau dann transversal zu M, wenn v ein regulärer Wert der Abbildung σ_z ist. (In diesem Kontext bedeutet 'transversal' einfach 'in den Schnittpunkten ist γ nicht tangential zu M').

(e) Sie nun γ ein Strahl an z_0, der M transversal in einer nichtleeren Menge schneidet. (So ein Strahl existiert, und die Schnittmenge ist dann endlich (warum?).) Sei z_1 ein weiterer Punkt auf γ, der nicht auf M liegt, und sei l die Anzahl der Schnittpunkte von γ und M zwischen z_0 und z_1. Dann gilt

$$\deg_2(\sigma_{z_0}) = \deg_2(\sigma_{z_1}) + l \bmod 2.$$

(**Hinweis:** Malen Sie ein Bild.)

(f) Charakterisieren Sie die Komponenten von $\mathbb{R}^{n+1} \backslash M$ mittels $\deg_2(\sigma_z)$.

b.w.

Aufgabe 2. Seien $M, N \subset \mathbb{R}^q$ kompakte, orientierte Mannigfaltigkeiten ohne Rand der Dimension m bzw. n. Die Mannigfaltigkeiten sollen disjunkt sein und es gelte $m + n = q - 1$. Die **Verschlingungszahl** $lk(M, N)$ ist der Abbildungsgrad von

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & \mathrm{S}^{q-1} \\ (x, y) & \longmapsto & \sigma_y(x). \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) $lk(M, N) = (-1)^{(m-1)(n-1)} lk(N, M)$.

(b) Falls M in $\mathbb{R}^q \backslash N$ zu einem Punkt deformiert werden kann (d.h. die Einbettung $M \longrightarrow \mathbb{R}^q \backslash N$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung), oder falls M eine kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^q \backslash N$ berandet, so ist $lk(M, N) = 0$.

(c) Seien $S, \bar{S}$ die Randkomponenten eines in $\mathbb{R}^3$ eingebetteten k-fach verdrehten Zylinders. Mit geeigneten Orientierungen der Randkomponenten gilt $lk(S, \bar{S}) = k$.

(d) Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ eingebettete Zylinder mit k_1 bzw. k_2 Verdrehungen. Für $|k_1| \neq |k_2|$ gibt es keinen Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^3$, der den Zylinder C_1 in C_2 überführt.

Aufgabe 3. Sei $\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ die Einheitssphäre. Die **Hopf-Abbildung** ist gegeben durch

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathrm{S}^3 & \longrightarrow & \mathrm{S}^2 \\ & (z, w) & \longmapsto & [z : w] \end{array}$$

und definiert die sogenannte **Hopf-Faserung** durch Kreise $\mathrm{S}^1 \cong f^{-1}([z : w])$. Visualisieren Sie diese S^1-Fasern im $\mathbb{R}^3$ unter der stereographischen Projektion $\mathrm{S}^3 \backslash \{*\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Die Hopf-Faserung ist ein Beispiel eines S^1-Prinzipalbündels, die wir noch allgemein behandeln werden. Im wesentlichen heißt dies, daß jeder Punkt in S^2 eine Umgebung U besitzt, so daß $f^{-1}(U)$ diffeomorph zu $U \times S^1$ ist, und daß die Fasern die Bahnen einer S^1-Wirkung sind. Speziell tritt die Hopf-Faserung auf bei der Beschreibung des Dirac-Monopols in der Elektrodynamik.

Aufgabe 4. Die **Hopf-Invariante** $H(f)$ einer stetigen Abbildung $f\colon \mathrm{S}^3 \longrightarrow \mathrm{S}^2$ ist als die Verschlingungszahl $lk(g^{-1}(a), g^{-1}(b))$ definiert; hier ist g eine differenzierbare Abbildung in der Homotopieklasse von f, und a, b sind verschiedene reguläre Werte von g. Die Verschlingungszahl wird in $\mathbb{R}^3 \cong \mathrm{S}^3 \backslash \{c\}$ berechnet für $f(c) \neq a, b$. Zeigen Sie:

(a) $H(f)$ ist eine wohldefinierte Homotopieinvariante von f und verschwindet genau für nullhomotope Abbildungen (d.h. Abbildungen, die homotop zu einer konstanten Abbildung sind).

(b) Hat eine Abbildung $g\colon \mathrm{S}^3 \longrightarrow \mathrm{S}^3$ den Grad p, so gilt $H(f \circ g) = pH(f)$.

(c) Hat eine Abbildung $h\colon \mathrm{S}^2 \longrightarrow \mathrm{S}^2$ den Grad q, so gilt $H(h \circ f) = q^2 H(f)$.

(d) Die in Aufgabe 3 definierte Hopf-Abbildung hat Hopf-Invariante 1.

Wir wünschen den Hörern der Vorlesung frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr.

Abgabe: Mittwoch 11.01.05 in der Vorlesung.