Differentialtopologie I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Es sei U ein topologischer Raum und $f\colon U \longrightarrow \mathcal{M}(n \times k)$ eine Abbildung in den Vektorraum der reellen $(n \times k)$-Matrizen. Definiere

$$\begin{array}{rcccccl} F: & U & \times & \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\,u & , & x\,) & \longmapsto & f(u)\cdot x \end{array}.$$

(a) Die Abbildung F ist genau dann stetig, wenn f stetig ist.

(b) Ist U eine Mannigfaltigkeit, so ist F genau dann differenzierbar, wenn f differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Sei (E, π, B) ein Vektorbündel über einem zusammenhängenden Raum B und die Abbildung $f\colon E \longrightarrow E$ ein Bündelmorphismus über id_B.

(a) Falls $f \circ f = f$, so hat f konstanten Rang.

(b) Falls $f \circ f = \mathrm{id}_E$, so ist

$$\mathrm{Fix}(f) := \{e \in E \mid f(e) = e\}$$

ein Unterbündel von E.

Aufgabe 3.

(a) Beschreiben Sie das Möbiusband (naiv aufgefaßt), ohne seinen Rand, als Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$.

(b) Beschreiben Sie eine Abbildung $M \longrightarrow \mathrm{S}^1$, die M die Struktur eines Geradenbündels, d.h. eines 1-dimensionalen Vektorbündels gibt.

(c) Zeigen Sie, daß das Geradenbündel aus (b) äquivalent zum kanonischen Geradenbündel über $\mathbb{RP}^1 \cong \mathrm{S}^1$ ist.

Aufgabe 4. Sei (E, π, B) ein Geradenbündel über einem zusammenhängenden Raum B. Ein solches Geradenbündel heißt **orientierbar**, falls man in jeder Faser $\pi^{-1}(b)$ eine Orientierung so wählen kann, daß es einen Bündelatlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ gibt, s.d. $\varphi_\alpha\colon\ \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}$ jede Faser $\pi^{-1}(b)$, $b \in U_\alpha$, orientierungserhaltend auf $\{b\} \times \mathbb{R}$ (mit der Standardorientierung) abbildet.

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Geradenbündel ist orientierbar.

(ii) $E\backslash\{\text{Nullschnitt}\}$ ist nicht zusammenhängend.

(iii) Das Geradenbündel ist trivial.

(b) Das kanonische Geradenbündel über $\mathbb{RP}^1$ ist nicht trivial.

Abgabe: Mittwoch 18.01.05 in der Vorlesung.