WS 2005/2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie I

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.

(a) Ist (E, π, B) ein triviales Bündel und $f\colon B_0 \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung, so ist auch das induzierte Bündel $(f^*E, f^*\pi, B_0)$ trivial.

(b) Sei (E, π, B) ein Vektorbündel und $\pi_0\colon E\setminus\{\text{Nullschnitt}\} \longrightarrow B$ die Einschränkung von π auf das Komplement des Nullschnittes. Geben Sie einen nirgends verschwindenden „kanonischen" Schnitt von π_0^*E an.

Aufgabe 2.

(a) Jedes $\mathbb{R}^n$-Bündel über einem Intervall I ist trivial.

(b) Es gibt genau zwei $\mathbb{R}^n$-Bündel über S^1.
(**Hinweis:** Aufgrund von (a) kann man annehmen, daß ein gegebenes $\mathbb{R}^n$-Bündel $E \longrightarrow \mathrm{S}^1$ beschrieben wird durch

$$E = (U_1 \times \mathbb{R}^n \sqcup U_2 \times \mathbb{R}^n) / \sim\,,$$

wobei U_1, $U_2 \subset \mathrm{S}^1$ zwei offene Intervalle sind, so daß $U_1 \cap U_2$ zwei Zusammenhangskomponenten V_1, V_2 hat. Die Relation $\sim$ ist dann gegeben durch zwei Übergangsfunktionen

$$\psi_i\colon V_i \longrightarrow \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}),\ i = 1, 2.$$

Zeigen Sie, daß das Bündel $E \longrightarrow \mathrm{S}^1$ bis auf Bündeläquivalenz nur davon abhängt, ob ψ_1 und ψ_2 in die gleiche oder in verschiedene Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ abbildet.)

Aufgabe 3. Für jedes beliebige Vektorbündel E ist $E \oplus E$ orientierbar.

Aufgabe 4. Sei M eine Mannigfaltigkeit und Δ die Diagonale in $M \times M$:

$$\Delta := \{(p, p) \in M \times M \mid p \in M\}\,.$$

Dann ist Δ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$, deren Tangential- und Normalenbündel äquivalent sind.

Abgabe: Mittwoch 25.01.05 in der Vorlesung.