WS 2006/2007 Prof. Hansjörg Geiges

Kontaktgeometrie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die auf der $(2n+1)$-dimensionalen Sphäre $\mathrm{S}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ durch

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{n+1} (x_j dy_j - y_j dx_j)$$

definierte 1-Form, wobei $(x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1})$ die kartesischen Koordinaten auf dem $\mathbb{R}^{2n+2}$ sind, eine Kontaktstruktur definiert. Die durch α_0 auf der Sphäre definierte Kontaktstruktur wird die **Standardstruktur der Sphäre** genannt.

(b) Berechnen Sie den Reeb-Fluß zu α_0.

Aufgabe 2. Ein Kontaktomorphismus $\phi\colon (M, \xi) \longrightarrow (M, \xi)$ heißt **strikt bezüglich einer Kontaktform** α von ξ, falls er die Kontaktform erhält, d.h. falls $\phi^*\alpha = \alpha$. Zeigen Sie, daß ein strikter Kontaktomorphismus den zu α gehörigen Reeb-Fluß erhält.

Aufgabe 3. Sei (V, ω) ein (endlich-dimensionaler) symplektischer Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Es bezeichne $U^\perp$ das symplektisch othogonale Komplement von U. Dann gilt:

(i) $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

(ii) $(U^\perp)^\perp = U$.

(iii) U ist symplektisch, d.h. $U \cap U^\perp = \emptyset$, genau dann, wenn $\omega|_U$ symplektisch ist. In diesem Fall ist auch $U^\perp$ symplektisch.

Aufgabe 4. Sei (V,ω) ein (endlich-dimensionaler) symplektischer Vektorraum.

(a) Es gibt eine Basis

$$\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{f}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*, \mathbf{f}_n^*\}$$

für den Dualraum V^* von V, so daß

$$\omega = \mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{f}_1^* + \cdots + \mathbf{e}_n^* \wedge \mathbf{f}_n^*;$$

insbesondere hat V gerade Dimension.

(b) Sei

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_n\}$$

die entsprechende duale Basis für V. Bestimmen Sie die Matrix A, mit der ω geschrieben werden kann als

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{y}.$$

(c) Eine schiefsymmetrische Bilinearform ω auf einem $2n$-dimensionalen Vektorraum V ist eine symplektische Form genau dann, wenn $\omega^n \neq 0$.

Abgabe: Donnerstag 02.11.06 in der Vorlesung.