Kontaktgeometrie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1.

(a) Sei $M \subset (W, \omega)$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 in einer symplektischen Mannigfaltigkeit, so daß

- $M = H^{-1}(c)$ für eine Hamilton-Funktion $H\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ und
- M transversal zu einem Liouville-Vektorfeld Y für ω ist.

Dann ist der Reeb-Fluß von $\alpha = \iota_Y \omega$ eine Reparametrisierung des Hamilton-Flusses.

(b) Zeigen Sie, daß $\alpha = x\,d\theta + y\,dz - z\,dy$ eine Kontaktform auf $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \subset \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}^3$ definiert (mit S^1-Koordinate θ und kartesischen Koordinaten x, y, z auf $\mathbb{R}^3$). Interpretieren Sie dieses Beispiel im Sinne von (a).

Aufgabe 2. Finden Sie einen strikten Kontaktomorphismus $(\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha_2)$ für

$$\alpha_1 = dz + \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j \quad \text{und} \quad \alpha_2 = dz + \sum_{j=1}^{n} (x_j dy_j - y_j dx_j).$$

Aufgabe 3. Auf $\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ betrachte man die C^∞-Familie von 1-Formen

$$\alpha_t = x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + (1+t)(x_2 dy_2 - y_2 dx_2)$$

mit $t \in \mathbb{R}_0^+$.

(a) α_t ist eine Kontaktform auf S^3 für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$.

(b) Es gibt keine Isotopie ψ_t von S^3 mit $\psi_t^* \alpha_t = \alpha_0$.

Aufgabe 4. Sei ω_t mit $t \in [0,1]$ eine C^∞-Familie von k-Formen auf einer Mannigfaltigkeit M, und ψ_t mit $t \in [0,1]$ eine Diffeotopie von M. Es bezeichne X_t das zeitabhängige Vektorfeld, das durch $X_t \circ \psi_t = \dot{\psi}_t$ gegeben ist. Beweisen Sie, daß folgende Beziehung gilt:

$$\frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega_t) = \psi_t^* (\dot{\omega}_t + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t).$$

(**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst, daß für eine zeitunabhängige k-Form ω die Beziehung $\frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega) = \psi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \omega_t)$ gilt. Diese Beziehung folgt aus folgenden Beobachtungen: (i) Sie gilt für Funktionen (ii) Gilt sie für ω und ω', so auch für $\omega \wedge \omega'$. (iii) Gilt sie für ω, dann auch für $d\omega$. (iv) Lokal wird die Algebra von Differentialformen von Funktionen und ihren Differentialen erzeugt.)

Abgabe: Mittwoch, 08.11.06, in der Vorlesung.