WS 2006/2007 Prof. Hansjörg Geiges

# Kontaktgeometrie

Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Zwei Kontaktstrukturen $\xi_0$ und $\xi_1$ auf einer Mannigfaltigkeit $M$ heißen **kontaktisotop**, wenn es eine Diffeotopie $\psi_t$ von $M$ gibt, so daß $T\psi_1(\xi_0) = \xi_1$ und für jedes $t \in [0,1]$ die Distribution $T\psi_t(\xi_0)$ eine Kontaktstruktur ist.

(a) Zeigen Sie, daß die durch die Formen

$$\alpha_0 = dz + \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 2\,dz + \sum_{j=1}^{n}(x_j dy_j - y_j dx_j)$$

auf $\mathbb{R}^{2n+1}$ definierten Kontaktstrukturen kontaktisotop sind vermöge einer Kontaktisotopie $\psi_t$ mit $\dot{\psi}_t \in T\psi_t(\xi_0)$. Geben Sie den Fluß $\psi_t$ explizit an.

(b) Beschreiben Sie eine Isotopie, die sogar die Kontaktformen erhält, d.h. so daß $\psi_1^*\alpha_1 = \alpha_0$.

**Aufgabe 2.**

(a) Die Standard-Kontaktform auf $\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ läßt sich in den Standardkoordinaten $(z, w)$ von $\mathbb{C}^2$ schreiben als

$$\alpha_0 = \frac{i}{2}(z\,d\bar{z} - \bar{z}\,dz + w\,d\bar{w} - \bar{w}\,dw).$$

(b) Finden Sie eine Kontaktstruktur auf allen Linsenräumen $L(p,q)$.

**Aufgabe 3.** Auf $\mathbb{R}^3$ mit Zylinderkoordinaten $(z, r, \varphi)$ betrachte man die 1-Form

$$\alpha = \cos(r)\,dz + r\sin(r)\,d\varphi.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\alpha$ in der Tat eine glatte 1-Form ist ($d\varphi$ ist in $r = 0$ nicht definiert!).

(b) Zeigen Sie, daß $\alpha$ eine Kontaktform ist.

(c) Finden Sie eine eingebettete Scheibe $D^2$ in $\mathbb{R}^3$ mit $TD^2|_{\partial D^2} = \ker(\alpha)|_{\partial D^2}$.

b.w.

**Aufgabe 4.** Betrachten Sie auf dem $\mathbb{R}^3$ folgende Familie $\alpha_t$ von Kontaktformen:

$$\alpha_t = dz + (x + ty)\, dy.$$

Finden Sie eine Kontaktisotopie $\psi_t$ mit der Eigenschaft $\psi_t^* \alpha_t = \alpha_0$ und

(a) $\dot{\psi}_t$ liegt in der Kontaktstruktur $\xi_t$.

(b) $\dot{\psi}_t$ ist proportional zum Reeb-Vektorfeld $R_{\alpha_t}$.

Abgabe: Mittwoch, 15.11.06, in der Vorlesung.