WS 2006/2007 Prof. Hansjörg Geiges

Kontaktgeometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Formulieren und beweisen Sie einen Umgebungssatz für Legendre-Knoten in 3-dimensionalen Kontaktmannigfaltigkeiten (M, ξ) für den Fall, daß ξ nicht notwendigerweise ko-orientierbar ist.

Aufgabe 2. Beschreiben Sie mögliche Front-Projektionen von (positiv) transversalen links- bzw. rechtshändigen Kleeblattknoten in $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$.

Aufgabe 3. Man schreibe Vektoren in $\mathbb{R}^{2n}$ in der Form $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Die gewöhnliche symplektische Struktur Ω auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$ kann in der Form

$$\Omega\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) = \mathbf{x}\,\mathbf{y}' - \mathbf{y}\,\mathbf{x}'$$

geschrieben werden.

(b) Sei $\mathrm{Sp}^+(2n) \subset M_{2n}(\mathbb{R})$ die Gruppe der positiv konformen, symplektischen Matrizen, d.h. $\mathrm{Sp}^+(2n)$ besteht aus den Elementen $S \in M_{2n}(\mathbb{R})$, für die ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$ existiert, so daß

$$\Omega\left(S\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \Omega\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Schreibe $S \in M_{2n}(\mathbb{R})$ in Blockform

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R}).$$

Dann ist $S \in \mathrm{Sp}^+(2n)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} A^T C &= C^T A \\ B^T D &= D^T B \\ A^T D - C^T B &= \lambda \cdot I_n \end{aligned}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Hier bezeichnet I_n die Einheitsmatrix in $M_n(\mathbb{R})$.

b.w.

Aufgabe 4. Sei $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}^+(2n)$ wie in Aufgabe 3(b) beschrieben und $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(a) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n+1} & \longmapsto & \mathbb{R}^{2n+1} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) & \longmapsto & (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, Z) \end{array}$$

gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{X} & = & A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \\ \mathbf{Y} & = & C\mathbf{x} + D\mathbf{y} \\ Z & = & \lambda z - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A^T C\mathbf{x} - \mathbf{x}^T C^T B\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{y}^T B^T D\mathbf{y} \end{array}$$

ist ein Kontaktomorphismus von $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st} = \ker(dz + \mathbf{x}\, d\mathbf{y}))$.

(b) **(Kontakt-Alexander-Trick)** Sei B_{st} der Einheitsball in $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ und

$$j\colon\ B_{st} \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$$

eine Kontakteinbettung, die den Ursprung auf den Ursprung abbildet. Setze

$$\delta_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = (t\mathbf{x}, t\mathbf{y}, t^2 z).$$

Dann gibt es eine Isotopie von Kontakteinbettungen

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z; t) \longmapsto \begin{cases} \delta_t^{-1} \circ j \circ \delta_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) & \text{für} \quad t \in (0, 1] \\ S_0 j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) & \text{für} \quad t = 0 \end{cases}$$

für eine geeignete Abbildung $S_0 j$ wie in (a). Bestimmen Sie die entsprechenden A, B, C, D, λ.

Abgabe: Mittwoch, 22.11.06, in der Vorlesung.