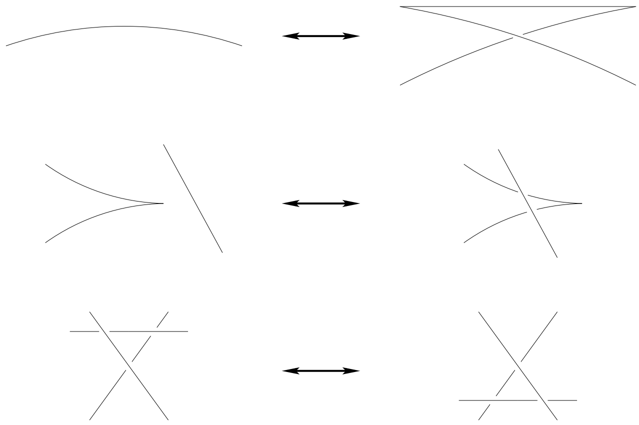
WS 2006/2007 Prof. Hansjörg Geiges

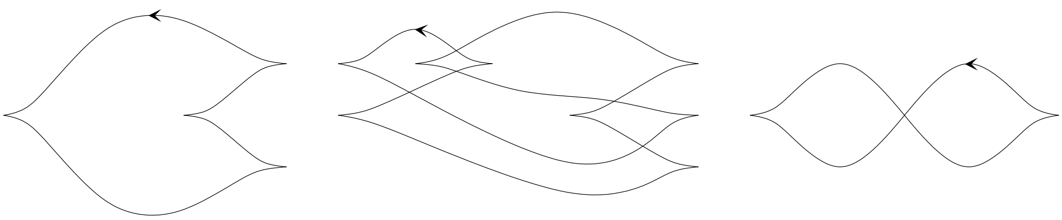
Kontaktgeometrie

Übungsblatt 7

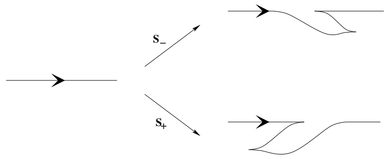
Aufgabe 1. Es gilt das folgende Legendre-Reidemeister Theorem: Zwei Legendre-Knoten L_1, L_2 in der Standard-Kontaktstruktur $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$ sind Legendre-isotop genau dann, wenn ihre Front-Projektionen durch reguläre planare Isotopien und die folgenden Bewegungen auseinander hervorgehen:



Eine planare Isotopie heißt regulär, wenn Sie durch eine Isotopie von Front-Projektionen darstellbar ist. Welche der drei folgenden Legendre-Knoten sind Legendre-isotop? Beweisen Sie ihre Aussage unter Verwendung des genannten Theorems.

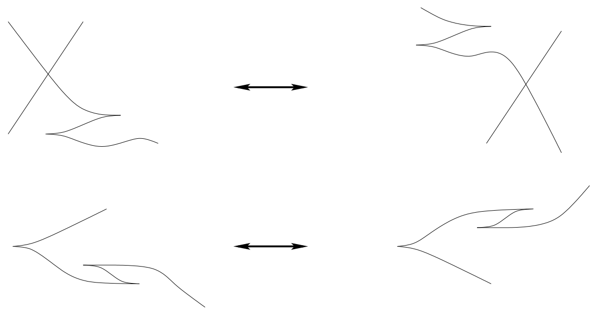


Aufgabe 2. Sei L ein orientierter Legendre-Knoten in $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$. Das Einfügen zweier aufeinanderfolgender Spitzen, **Zickzack** genannt, in den Knoten L heißt **Stabilisierung**. Man unterscheidet **negative bzw. positive Stabilisierungen** wie in folgendem Bild und bezeichnet den neuen Knoten mit $S_-(L)$ bzw. $S_+(L)$.



(a) Zeigen Sie, daß man Zickzacke durch Legendre-Isotopien an Spitzen und Kreuzungen „vorbeischieben" kann, d.h. es gibt Legendre-Isotopien

b.w.



(b) Zeigen Sie, daß die Operation der Stabilisierung wohldefiniert ist.

Aufgabe 3. Beschreiben Sie die charakteristische Blätterung

(a) der Sphäre S^2 in der Kontaktmannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$,

(b) der Sphäre S^2 vom Radius $3\pi/2$ in der Kontaktmannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^3, \xi_{ot})$,

(c) der 2-Tori $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \times \{0\}$, $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \times \{\pi/2\}$ in $(\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1, \ker(\cos(\theta_1)\, d\theta_2 + \sin(\theta_1)\, d\theta_3))$.

Aufgabe 4. Ein **offenes Buch** auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M besteht aus einer Kodimension-2 Untermannigfaltigkeit B, die **Bindung** genannt wird, und einer (glatten, lokal trivialen) Faserung $p\colon\ M \backslash B \longrightarrow \mathrm{S}^1$, s.d. eine Tubenumgebung $B \times D^2$ existiert in welcher p der Faserung entspricht, die durch Projektion auf die Winkelkoordinate auf D^2 gegeben ist. Die Fasern von p werden **Blätter** genannt.

(a) Zeigen Sie, daß diese Definition äquivalent zu der aus der Vorlesung ist.

Ein offenes Buch (B, p) auf einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit M mit Kontaktstruktur $\xi = \ker\alpha$, wobei M durch die von α induzierte Volumenform orientiert ist, heißt **der Kontaktstruktur angepaßt**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die 2-Form $d\alpha$ induziert eine symplektische Form auf jeder Seite und repräsentiert ihre positive Orientierung.

(ii) Die 1-Form α verschwindet nicht auf TB und induziert die positive Orientierung.

Zeigen Sie, daß durch folgende Daten jeweils ein der Standard-Kontaktstruktur auf $\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ angepaßtes offenes Buch beschrieben wird:

(b) $B = \{(z_1, z_2) \in \mathrm{S}^3 \mid z_1 = 0\}$ und

$$p\colon \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{S}^3 \backslash B & \longrightarrow & \mathrm{S}^1 \subset \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \dfrac{z_1}{|z_1|} \end{array}$$

(c) $B = \{(z_1, z_2) \in \mathrm{S}^3 \mid z_1 z_2 = 0\}$ und

$$p\colon \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{S}^3 \backslash B & \longrightarrow & \mathrm{S}^1 \subset \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \dfrac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} \end{array}$$

Abgabe: Mittwoch, 06.12.06, in der Vorlesung.