WS 2006/2007 Prof. Hansjörg Geiges

Kontaktgeometrie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Ein Vektorfeld X auf einer in der 3-Mannigfaltigkeit M eingebetteten Fläche S induziert die charakteristische Blätterung einer Kontaktstruktur genau dann, wenn es eine Flächenform Ω gibt, derart, daß die Divergenz (bezüglich Ω) des Vektorfeldes X in seinen Nullstellen nicht verschwindet. Zeigen Sie:

(a) Diese Bedingung ist unabhängig von der Wahl der Flächenform.

(b) Diese Bedingung ist unabhängig von der Wahl des die charakteristische Blätterung definierenden Vektorfeldes X.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $T^2 \times \mathbb{R}$ mit folgenden 1-Formen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= \sin(\pi y)\,dx + 2\sin(\pi x)\,dy + (2\cos(\pi x) - \cos(\pi y))\,dz \\
\alpha_2 &:= \sin(\pi y)\,dx + (1 - \frac{1}{K}\cos(\pi x))\sin(\pi x)\,dy + (\cos(\pi x) - \frac{1}{K}\cos(2\pi x) - \cos(\pi y))\,dz.
\end{aligned}$$

Hier sind x,y die durch den Quotienten $\mathbb{R}^2/(2\mathbb{Z})^2$ auf T^2 induzierten Koordinaten, und z ist die $\mathbb{R}$-Koordinate. Für weitere Betrachtungen wählen wir $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x,y \leq 1\}$ als Fundamentalgebiet.

(a) Zeigen Sie, daß α_1 und α_2 für geeignete Wahl des Parameters $K \in \mathbb{R}$ Kontaktformen auf $T^2 \times \mathbb{R}$ sind.

Es sollen nun ξ_1 und ξ_2 die von α_1 und α_2 definierten Kontaktstrukturen bezeichnen.

(b) Sei $S := T^2 \times \{0\}$ und $\Omega = dx \wedge dy$ die Standard-Flächenform auf S. Berechnen Sie die charakteristischen Blätterungen S_{ξ_1} und S_{ξ_2}.

(c) Berechnen Sie die Singularitäten der Blätterungen, deren Indizes und Divergenzen. Zeichnen Sie beide Blätterungen.

Aufgabe 3. Sind die charakteristischen Blätterungen S_{ξ_1} und S_{ξ_2} der letzten Aufgabe homöomorph? Sind sie diffeomorph?

b.w.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die 3-Mannigfaltigkeit $T^2 \times \mathbb{R}$ mit den Kontaktformen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \cos z\, dx + \sin z\, dy \\ \alpha_2 &:= dx + z\, dy. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die von α_1 bzw. α_2 beschriebenen Kontaktstrukturen in einer Umgebung von $S := T^2 \times \{0\}$ äquivalent sind. Geben Sie einen Kontaktomorphismus an.

Abgabe: Mittwoch, 13.12.06, in der Vorlesung.