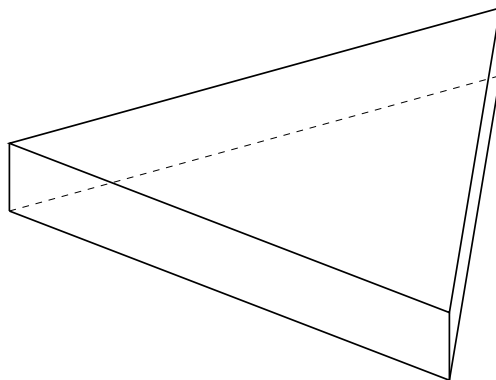


# Mathematik für Physiker I

## Übungsblatt 3

**Aufgabe 1.** Beschreiben Sie alle Gruppen mit einem, zwei, drei oder vier Elementen (z.B. durch eine Verknüpfungstafel).

**Aufgabe 2.** Betrachten Sie eine dreieckige Platte, deren Dreiecksseiten alle die gleiche Länge haben.



Es gibt Drehungen um geeignete Drehachsen im  $\mathbb{R}^3$ , die diese Platte auf sich selbst abbilden (einschließlich der identischen Abbildung, die den ganzen  $\mathbb{R}^3$  fest läßt). Beschreiben Sie diese Drehsymmetrien.

Zeigen Sie, daß diese Drehungen eine Gruppe bilden, und daß man jedes Element dieser Gruppe als eine Verknüpfung von zwei fest gewählten Drehungen schreiben kann. (Man sagt: Die Gruppe wird von diesen beiden Elementen erzeugt.) Beachten Sie, daß das neutrale Element  $e$  der Gruppe hier als die „leere“ Verknüpfung der beiden Erzeuger interpretiert wird. Ist diese Gruppe abelsch?

**Aufgabe 3.** Für  $x, y \in \mathbb{R}^+$  seien

$$A(x, y) := \frac{1}{2}(x + y) \quad G(x, y) := \sqrt{xy} \quad H(x, y) := \frac{2}{x^{-1} + y^{-1}}$$

das arithmetische, geometrische bzw. harmonische Mittel von  $x$  und  $y$ .

(a) Man zeige aus den Anordnungsaxiomen:  $H(x, y) \leq G(x, y) \leq A(x, y)$ .

b.w.

- (b) Wenn man zunächst eine Wegstrecke  $s$  mit der Geschwindigkeit  $x$  zurücklegt, und dann nochmals eine Strecke  $s$  mit der Geschwindigkeit  $y$ , welches der obigen Mittel beschreibt dann die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Gesamtstrecke?

**Aufgabe 4.**

- (a) Sei

$$M := \left\{ \frac{1}{2^m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von  $M$ , sofern diese existieren.

- (b) Seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  zwei nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie, daß auch die Menge

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

nach oben beschränkt ist, und daß gilt

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

**Bonusaufgabe.** (a) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

- (b) Für  $a > b > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$nb^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < na^{n-1}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort direkt aus den Anordnungsaxiomen.

**Knobelaufgabe.** (a) Ist  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine Lösung der polynomialen Gleichung

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0 = 0$$

mit  $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Z}$ , so ist  $x_0$  entweder ganzzahlig oder irrational.

- (b)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  und  $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$  sind irrational.

Abgabe: Montag 05.11.07 in der Vorlesung.