WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Seien $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi\colon G_1 \longrightarrow G_2$ heißt **Homomorphismus**, falls für alle $g, h \in G_1$ folgende Gleichung gilt:

$$\varphi(g \circ_1 h) = \varphi(g) \circ_2 \varphi(h).$$

Das Urbild des neutralen Elementes unter φ heißt **Kern von** φ und wird mit $\ker(\varphi)$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Ist $(G_3, \circ_3)$ eine weitere Gruppe und $\psi\colon G_2 \longrightarrow G_3$ ein Homomorphismus, so auch $\psi \circ \varphi$.

(b) $\ker(\varphi) \subset G$ ist eine Untergruppe.

Ist φ ein bijektiver Homomorphismus, so nennt man φ **Isomorphismus** und sagt, G_1 und G_2 seien **isomorphe Gruppen**.

(c) Ein surjektiver Homomorphismus, dessen Kern nur aus dem neutralen Element besteht, ist ein Isomorphismus.

(d) Sind $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ isomorphe Gruppen?

Aufgabe 2. Verifizieren Sie die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen z, w:

(i)	$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$	(vii)	$z^{-1} = \overline{z}\lvert z\rvert^{-2}$ für $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$
(ii)	$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$	(viii)	$\lvert z\rvert \geq 0$, mit Gleichheit genau für $z = 0$
(iii)	$z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$	(ix)	$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$
(iv)	$z - \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Im}(z)$	(x)	$\lvert\mathrm{Re}(z)\rvert \leq \lvert z\rvert$, $\lvert\mathrm{Im}(z)\rvert \leq \lvert z\rvert$
(v)	$z = \overline{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	(xi)	$\lvert zw\rvert = \lvert z\rvert\lvert w\rvert$
(vi)	$z\overline{z} = \lvert z\rvert^2$	(xii)	$\lvert z + w\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert w\rvert$ (Dreiecksungleichung)

Aufgabe 3.

(a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{(i)}\ \frac{1}{1-i} \qquad \text{(ii)}\ \frac{2+3i}{4-i} \qquad \text{(iii)}\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(iv)}\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

b.w.

(b) Skizzieren Sie die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt

   (i) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$
   (ii) $|z-2| < 1$
   (iii) $|z-2| + |z+2| = 5$
   (iv) $\operatorname{Im}((z-i)(z-1)^{-1}) = 0$

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$. Zeigen Sie, daß diese Lösungen die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ bilden.

(b) Schreiben Sie das Polynom $z^3 - 1$ als Produkt zweier Polynome vom Grad 1 bzw. 2 mit reellen Koeffizienten.

Bonusaufgabe.

(a) Welche der folgenden Mengen sind abzählbar? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

   (i) Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen
   (ii) Die Teilmenge von $\mathbb{R}$ bestehend aus den Dezimalzahlen mit endlicher Dezimalbruchentwicklung, d.h. Zahlen der Form
   $$D, d_1 d_2 \dots d_n 00 \dots$$
   (iii) Die Menge der Homomorphismen $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$.

(b) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar. (Bei Aufgabenstellungen dieser Form ist stets gemeint: „Zeigen Sie:...“)

Knobelaufgabe. Das Hotel „Hilbert“ besitzt abzählbar unendlich viele Zimmer. Bei Ihrer Ankunft im Hotel sind diese leider alle schon belegt. Trotzdem findet die Rezeptionistin durch geschicktes Umverteilen der Gäste noch ein Zimmer für Sie, ohne daß ein Gast das Hotel verlassen oder mit einem anderen das Zimmer teilen muß. Wie geht das?
Jetzt kommt noch ein Reisebus der Canto(u)rs mit abzählbar unendlich vielen Reisenden. Können diese auch noch untergebracht werden?

Abgabe: Montag 12.11.07 in der Vorlesung.