WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Begründen Sie, warum die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x^{r/s} \end{array}$$

für $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie ihre Ableitung

(i) mittels der Darstellung $f(x) = (x^{1/s})^r$,

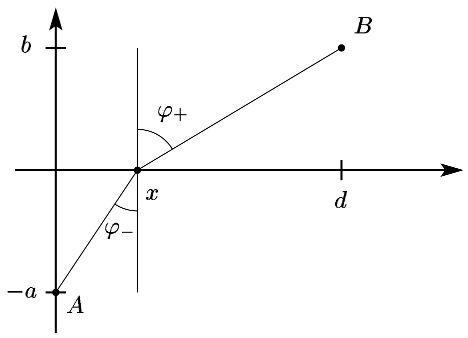
(ii) aus der Identität $(f(x))^s = x^r$.

Aufgabe 2. Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

ist differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.
(**Hinweis:** Sie dürfen verwenden, daß die cos-Funktion stetig differenzierbar ist mit $\cos' = -\sin$.)

Aufgabe 3. Gegeben seien die Punkte $A = (0, -a)$ und $B = (d, b)$ in der Ebene mit $a, b, d > 0$. In der unteren Halbebene $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ bewege man sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_-, in der oberen Halbebene $H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_+. Man finde den schnellsten Weg von A nach B. Dazu darf man verwenden, daß schnellste Wege in H_+ oder H_- Geraden sind. Weiter:



b.w.

(i) Berechnen Sie die Zeit $t(x)$, um via $(x, 0)$ von A nach B zu gelangen.

(ii) Berechnen Sie $t'(x)$ und zeigen Sie damit, daß für den schnellsten Weg gilt:

$$\frac{\sin\varphi_+}{\sin\varphi_-} = \frac{v_+}{v_-}. \tag{$\star$}$$

Das *Fermatsche Prinzip* besagt, daß sich Licht stets den schnellsten Weg sucht. Diese Aufgabe zeigt, daß aus dem *Fermatschen Prinzip* das *Snelliussche Brechungsgesetz* ($\star$) folgt.

Aufgabe 4.

(a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

(i) $\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

(ii) $\begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$

(iii) $\begin{array}{ccc} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$

Geben Sie das Bild dieser Funktionen an.

(b) Begründen Sie, warum auf dieser Bildmenge die Umkehrfunktionen

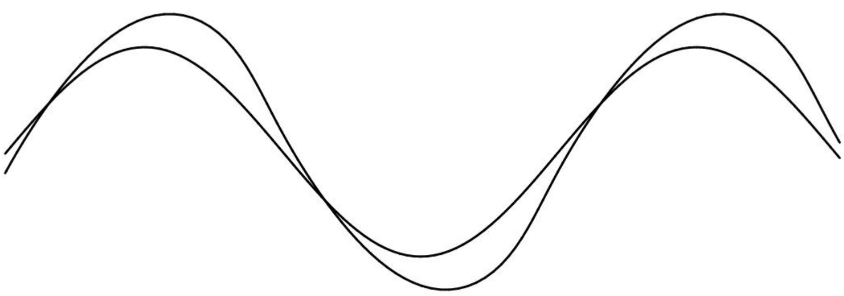
$$\arcsin := \sin^{-1}, \ \arccos := \cos^{-1}, \ \arctan := \tan^{-1}$$

existieren. (Hier steht **arc** für **arcus**, d.h. Bogen. So ist z.B. $\arcsin y$ der Winkel x (in Radian) mit $\sin x = y$, und das Radianmaß dieses Winkels per Definition gleich der Bogenlänge auf dem Einheitskreis.)

(c) Bestimmen Sie die Ableitung der Tangensfunktion.

(d) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen arcsin, arccos und arctan.

Knobelaufgabe. Das folgende Bild zeigt die Reifenspuren eines Fahrrades. In welche Richtung ist das Fahrrad gefahren? Welche der beiden Spuren stammt vom Hinterrad?



Abgabe: Montag 03.12.07 in der Vorlesung.