WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Ziel dieser Aufgabe ist es, ohne Differentialrechnung zu beweisen, daß für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x. \tag{1}$$

Führen Sie dazu folgende Schritte aus:

(a) Zeigen Sie mittels der Additionstheoreme von sin und cos folgende Gleichheit:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

(b) Zeigen Sie ohne die Regel von de L'Hospital:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1.$$

(c) Sei f eine auf $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion und $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Eine **Riemannsche Zwischensumme** ist ein Ausdruck der Form

$$S(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Dann gilt offensichtlich $U(Z,f) \leq S(Z,f) \leq O(Z,f)$. Man kann für jede Folge $S(Z_l, f)$ von Zwischensummen $Z_l = (x_0^l, \ldots, x_{n_l}^l)$ mit

$$\max\{x_k^l - x_{k-1}^l \colon\ k = 1, \ldots, n_l\} \longrightarrow 0 \qquad (l \to \infty)$$

die folgende Gleichheit beweisen:

$$\lim_{l\to\infty} S(Z_l, f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Zeigen Sie dies hier unter der stärkeren Annahme, daß f auf $[a,b]$ stetig ist.

(d) Begründen Sie, warum man x in eindeutiger Weise als $x = \tan y$ schreiben kann. Betrachten Sie dann für $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $(x_0, \ldots, x_n)$ des Intervalls $[0,x]$ mit $x_k = \tan(ky/n)$, $k = 0, \ldots, n$. Erläutern Sie, warum

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{1 + x_{k-1}x_k}$$

als Riemannsche Zwischensumme des Integrals

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

interpretiert werden kann.

(e) Zeigen Sie, daß

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{1 + x_{k-1}x_k} = \tan\frac{y}{n}.$$

(f) Beweisen Sie (1).

b.w.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden **Mittelwertsätze der Integralrechnung**:

(a) If $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

(b) Sind $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

(**Hinweis:** Wenden Sie in geeigneter Weise den Zwischenwertsatz für f an.)

Aufgabe 3. Für die (halbe) Schwingungszeit eines Pendels der Länge l im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$) als Funktion der Amplitude α gilt

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2 x}},$$

wobei $\sigma = \sin(\alpha/2)$. Berechnen Sie dieses sogenannte elliptische Integral näherungsweise für kleine σ durch Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung in σ.

Aufgabe 4. Die Lindhard-Funktion

$$f\colon (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{4x}\log\frac{1+x}{1-x}$$

spielt in der Elektronentheorie eine wichtige Rolle. Hier bezeichnet log den natürlichen Logarithmus. Berechnen Sie die Grenzwerte der Lindhard-Funktion bei $x = 0$ und $x = 1$.

Bonusaufgabe.

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig.
(**Hinweis:** Nehmen Sie $\epsilon = 1$, $\delta > 0$ beliebig, $x = 1/\delta$, $y = 1/\delta + \delta/2$.)

(b) Die Funktion $g\colon (0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1/x$ ist nicht gleichmäßig stetig.

Knobelaufgabe (Trost und Moral in der Mathematik). Dem Göttinger Mathematiker Franz Rellich wurde vorgeworfen, seine Analysis-Vorlesung sei anwendungsfern. Daraufhin stellte er folgende berühmte Aufgabe (siehe F.Wille, Humor in der Mathematik, S. 18). Aus rechtlichen Gründen weise ich darauf hin, daß man den Studenten auch durch eine Studentin und das Mädchen durch einen Knaben mit knackigen Waden ersetzen kann, zitiert wird aber die Originalversion:

> Ein Student geht auf der Weender Straße in Göttingen hinter einem Mädchen mit auffallend schönen Beinen her. Frage: In welcher Entfernung muß der Student hinter dem Mädchen hergehen, um die Beine, soweit sie unter dem Rock hervorschauen, unter dem größtmöglichen Blickwinkel zu sehen? Die Höhe des Rocksaumes über dem Erdboden sei dabei 60 cm und die Augenhöhe des Studenten 178 cm.
>
> Rellich pflegte hinzuzufügen: „Der Trost dabei ist, daß die gesuchte Entfernung nicht Unendlich ist, und die Moral, daß sie nicht Null ist.“

Abgabe: Montag 10.12.07 in der Vorlesung.