

# Elementare Differentialgeometrie

## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie mit einem Ansatz von der Form

$$(a \cos \varphi, b \sin \varphi, 0) + \lambda (p, q, r), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

daß das einschalige Hyperboloid

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

auf zwei Arten als Regelfläche dargestellt werden kann.

**Aufgabe 2.** Die **Tangente** an eine reguläre Kurve  $\alpha$  im  $\mathbb{R}^n$  im Punkt  $t = t_0$  ist die Gerade

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} = \alpha(t_0) + \lambda \mathbf{T}(t_0), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $\alpha$  die durch  $\alpha(t) = (t, g(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , gegebene ebene Kurve. Bestimmen Sie die Tangente an  $\alpha$  in  $t = t_0$  und vergleichen Sie dies mit der aus der Analysis I bekannten Tangente an einen Graphen.
- (b) Zeigen Sie, daß  $\alpha(t) = (\sin 3t \cos t, \sin 3t \sin t)$  eine reguläre Kurve ist und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in  $t = \pi/3$ .
- (c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Helix  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$  (mit  $r, h > 0$  gegeben) in  $t = t_0$ . Zeigen Sie, daß der Winkel zwischen  $\dot{\alpha}$  und dem Vektor  $(0, 0, 1)$  konstant ist.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, daß

$$\alpha(s) = \frac{1}{2} \left( s + \sqrt{s^2 + 1}, \left( s + \sqrt{s^2 + 1} \right)^{-1}, \sqrt{2} \log \left( s + \sqrt{s^2 + 1} \right) \right)$$

nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

**Aufgabe 4.** Sei  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gilt

$$k(s) = |x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|.$$